# Activités mentales ex 6 page 126

Sésamath

Maths TS spécialité

# énoncé

On donne la matrice de transition d'une marche aléatoire. Déterminer, si elle existe, sa répartition stable, c'est-à-dire la matrice ligne $M$ dont la somme des coefficients est égale à 1 et telle que $M = MT$.

1. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $T = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

# correction

## Analyse énoncé

On cherche la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$ ($a$ réel compris entre 0 et 1) telle que $MT = M$

# correction

1

1

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$$

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \times 0 + (1-a) \times 1 & \end{pmatrix}$$

## correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & \color{red}{a \times 1 + (1-a) \times 0} \end{pmatrix}$$

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix}$$

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = a \\ a = 1-a \end{cases}$$

# correction

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = a \\ a = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=a \\ a=1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a = a \\ a = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

La répartition stable de cette marche aléatoire existe, c'est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2

# correction

2

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \times 0,25 + (1-a) \times 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & \end{pmatrix}$$

# correction

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & \color{red}{a \times 0,75 + (1-a) \times 0} \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,75a = a \\ 0,75a = 1-a \end{cases}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,75a = a \\ 0,75a = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1,75a = 1$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,75a = a \\ 0,75a = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1,75a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{1,75} = \frac{4}{7}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-0,75a & 0,75a \end{pmatrix} = MT$$

Alors

$$MT = M \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,75a = a \\ 0,75a = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1,75a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{1,75} = \frac{4}{7}$$

La répartition stable de cette marche aléatoire existe, c'est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$