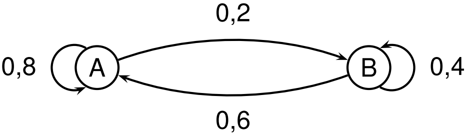
Exercice 27 page 129

Sésamath

Maths TS spécialité

Soit une marche aléatoire définie par le graphe :



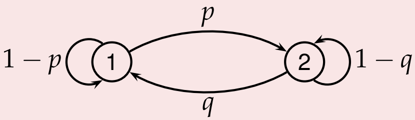
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ la répartition de probabilité à l'étape n de cette marche aléatoire.

1. Déterminer la matrice de transition T telle que $P_{n+1} = TP_n$.
2. Démontrer que $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,6$.
3. Démontrer que la suite (u_n) définie par la relation $u_n = a_n - 0,75$ est géométrique de raison 0,2.
4. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.
   Que représente cette limite ?

Rappel

Soit une marche aléatoire entre deux états 1 et 2 avec p la probabilité qu'il passe de 1 à 2 et q la probabilité qu'il passe de 2 à 1. On lui associe ci-dessous :

- le **graphe probabiliste** qui schématise les échanges entre 1 et 2 par des arêtes orientées, pondérées par les probabilités de passer d'un état à l'autre ou de rester au même état.



- la **matrice de transition** T est la matrice telle que le coefficient t_{ij} est égal à la probabilité :
  - de passer de l'état i à l'état j lorsque $i \neq j$;
  - de rester à l'état i lorsque $i = j$.

$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. On a donc ici

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

2. On a

2 On a

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

correction

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

2 On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \Big($$

2. On a

$$\left(\begin{array}{cc} & a_n \\ & b_n \end{array} \right.$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \color{red}{0,8 \times a_n + 0,6 \times b_n} \\ \end{array} \right.$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ \end{pmatrix}$$

2. On a

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6 \times a_n + 0,4 \times b_n \end{pmatrix}$$

correction

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix}$$

2 On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

2 On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

Or

$$P_{n+1} = TP_n$$

donc

correction

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

Or

$$P_{n+1} = TP_n$$

donc

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6b_n$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

Or

$$P_{n+1} = TP_n$$

donc

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6b_n$$

Comme, de plus, $a_n + b_n = 1$ alors

2. On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

Or

$$P_{n+1} = TP_n$$

donc

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6b_n$$

Comme, de plus, $a_n + b_n = 1$ alors

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6(1 - a_n)$$

2 On a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P_n$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,6b_n \\ 0,6a_n + 0,4b_n \end{pmatrix} = TP_n$$

Or

$$P_{n+1} = TP_n$$

donc

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6b_n$$

Comme, de plus, $a_n + b_n = 1$ alors

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6(1 - a_n)$$

soit

$$a_{n+1} = 0,2a_n + 0,6$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,75$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\ &= 0,2a_n + 0,6 - 0,75 \end{aligned}$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\ &= 0,2a_n + 0,6 - 0,75 \\ &= 0,2a_n - 0,15 \end{aligned}$$

correction

3. On a pour tout entier naturel n :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\
&= 0,2a_n + 0,6 - 0,75 \\
&= 0,2a_n - 0,15 \\
&= 0,2(a_n - 0,75)
\end{aligned}
$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\
&= 0,2a_n + 0,6 - 0,75 \\
&= 0,2a_n - 0,15 \\
&= 0,2(a_n - 0,75) \\
u_{n+1} &= 0,2u_n
\end{aligned}$$

3 On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\ &= 0,2a_n + 0,6 - 0,75 \\ &= 0,2a_n - 0,15 \\ &= 0,2(a_n - 0,75) \\ u_{n+1} &= 0,2u_n \end{aligned}$$

Comme

$$u_{n+1} = 0,2u_n \text{ pour tout entier naturel } n$$

alors

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors

correction

4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Or $u_n = a_n - 0,75$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,75$

4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$
Or $u_n = a_n - 0,75$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,75$
Mais $b_n = 1 - a_n$ donc $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0,25$

4 Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Or $u_n = a_n - 0,75$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,75$

Mais $b_n = 1 - a_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0,25$

Enfin, $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2, avec $-1 < 0,2 < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Or $u_n = a_n - 0,75$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,75$

Mais $b_n = 1 - a_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0,25$

Enfin, $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Cette limite représente la répartition stable correspondant à la marche aléatoire définie par le graphe donné c'est-à-dire, qu'au bout d'un nombre d'étapes assez grand, la probabilité d'être sur le sommet A est trois fois plus importante que d'être sur le sommet B.