Exercice 23 page 128

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.
3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.
5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
   b) En déduire une expression de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On a

correction

1. On a

$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B$$

correction

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

Or $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

Or $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $det(I - A) = 4 \neq 0$

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

Or $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$$I - A \text{ est inversible}$$

et :

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

Or $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$$I - A \text{ est inversible}$$

et :

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$$

1. On a

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B \end{aligned}$$

Or $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$$I - A \text{ est inversible}$$

et :

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$$

Par conséquent,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

correction

2. On a

2. On a

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C$$

correction

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

correction

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

Comme $C = AC + B$

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

Comme $C = AC + B$ alors

$$B - C = -AC$$

donc

correction

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

Comme $C = AC + B$ alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$V_{n+1} = AU_n - AC$$

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

Comme $C = AC + B$ alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= AU_n - AC \\ &= A(U_n - C) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C \end{aligned}$$

Comme $C = AC + B$ alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= AU_n - AC \\ &= A(U_n - C) \\ V_{n+1} &= AV_n \end{aligned}$$

3. On a

$$V_n = A^n V_0$$

4. Comme $V_n = U_n - C$ et $V_n = A^n V_0$ alors

4. Comme $V_n = U_n - C$ et $V_n = A^n V_0$ alors

$$U_n = V_n + C$$

4. Comme $V_n = U_n - C$ et $V_n = A^n V_0$ alors

$$\begin{aligned} U_n &= V_n + C \\ &= A^n V_0 + C \end{aligned}$$

4 Comme $V_n = U_n - C$ et $V_n = A^n V_0$ alors

$$\begin{aligned} U_n &= V_n + C \\ &= A^n V_0 + C \\ U_n &= A^n(U_0 - C) + C \end{aligned}$$

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout entier naturel n

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout entier naturel n

Initialisation pour $n = 0$:

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout entier naturel n

Initialisation pour $n = 0$:

On a

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout entier naturel n

Initialisation pour $n = 0$:

On a

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 3^0 & 2 \times 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0$$

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété $\mathcal{P}_n$: $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout entier naturel n

Initialisation pour $n = 0$:

On a

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 3^0 & 2 \times 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc initialisée pour $n = 0$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

correction

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

correction

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\left(\begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right.$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} 3^k \times 3 + 2k \times 3^{k-1} \times 0 \\ \end{matrix} \right.$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3^k & \\ & \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & \\ 0 \times 3 + 3^k \times 0 & \end{pmatrix}$$

correction

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \\ 0 & 3 & \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \times 2 + 2k \times 3^{k-1} \times 3 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

correction

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3^k & 2(k+1) \times 3^k \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3^k & 2(k+1) \times 3^k \\ 0 & 0 \times 2 + 3^k \times 3 \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3^k & 2(k+1) \times 3^k \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3^k & 2(k+1) \times 3^k \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1}$$

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.

On a alors $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^k & 2(k+1) \times 3^k \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0.

Conclusion :
Comme la propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et est héréditaire à partir de ce rang, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc bien pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \Bigg($$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\Bigg(\qquad \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{matrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \Bigg(\quad 3^n \times \frac{3}{2} + 2n \times 3^{n-1} \times \frac{5}{2}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} \\ \end{pmatrix}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} \\ 0 \times \frac{3}{2} + 3^n \times \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} \\ \dfrac{5 \times 3^n}{2} \end{pmatrix}$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} \\ \dfrac{5 \times 3^n}{2} \end{pmatrix} = A^n(U_0 - C)$$

5 a)

On a $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ et $U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U_0 - C$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} \\ \dfrac{5 \times 3^n}{2} \end{pmatrix} = A^n(U_0 - C)$$

Ainsi

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}}{2} + 5n3^{n-1} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5 \times 3^n}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$