Activités mentales ex 1 page 126

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Soit a et b deux réels et n un entier naturel.
Déterminer si chaque proposition est vraie ou fausse.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Pour tout n non nul, $A^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2^n & 0\end{pmatrix}$.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. Pour tout n, $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Pour tout n, $A^{4n}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
4. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $A^n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

correction

1 **FAUX** :

1. **FAUX** :
   D'après la calculatrice, pour $n = 2$,
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   qui n'est pas de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

correction

2 **VRAI** :

2 **VRAI** :

Puissance d'une matrice diagonale

Soit une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \mathrm{diag}(d_1^n, d_2^n, \ldots, d_p^n)$.

correction

3 **VRAI** :

3 **VRAI** :
D'après la calculatrice, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **VRAI** :
D'après la calculatrice, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

3 **VRAI** :

D'après la calculatrice, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^{4n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

correction

4 **VRAI** :

4 **VRAI** : D'après la calculatrice, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

correction

4 **VRAI** : D'après la calculatrice, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$