

## Exercice 23 page 128

*Sésamath*

Maths TS spécialité



Soit  $(U_n)$  une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $U_{n+1} = AU_n + B$  avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1 Déterminer une matrice  $C$  telle que  $C = AC + B$ .
- 2 On pose  $V_n = U_n - C$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = AV_n$ .
- 3 Exprimer  $V_n$  en fonction de  $V_0$ .
- 4 En déduire que  $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ .
- 5 a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

- b) En déduire une expression de  $U_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1 On a

1 On a

$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B$$

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

$$\text{Or } I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

$$\text{Or } I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(I - A) = 4 \neq 0$$

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

Or  $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $\det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$I - A$  est inversible

et :

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

Or  $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $\det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$I - A$  est inversible

et :

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$$

1 On a

$$\begin{aligned}C = AC + B &\Leftrightarrow C - AC = B \\ &\Leftrightarrow (I - A)C = B\end{aligned}$$

Or  $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $\det(I - A) = 4 \neq 0$

Alors,

$I - A$  est inversible

et :

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$$

Par conséquent,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2 On a

2 On a

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C$$

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

Comme  $C = AC + B$

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

Comme  $C = AC + B$  alors

$$B - C = -AC$$

donc

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

Comme  $C = AC + B$  alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$V_{n+1} = AU_n - AC$$

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

Comme  $C = AC + B$  alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= AU_n - AC \\ &= A(U_n - C)\end{aligned}$$

2 On a

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= U_{n+1} - C \\ &= AU_n + B - C\end{aligned}$$

Comme  $C = AC + B$  alors

$$B - C = -AC$$

donc

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= AU_n - AC \\ &= A(U_n - C) \\ V_{n+1} &= AV_n\end{aligned}$$

3 On a

$$V_n = A^n V_0$$

4 Comme  $V_n = U_n - C$  et  $V_n = A^n V_0$  alors

4 Comme  $V_n = U_n - C$  et  $V_n = A^n V_0$  alors

$$U_n = V_n + C$$

4 Comme  $V_n = U_n - C$  et  $V_n = A^n V_0$  alors

$$\begin{aligned}U_n &= V_n + C \\ &= A^n V_0 + C\end{aligned}$$

4 Comme  $V_n = U_n - C$  et  $V_n = A^n V_0$  alors

$$\begin{aligned}U_n &= V_n + C \\ &= A^n V_0 + C \\ U_n &= A^n (U_0 - C) + C\end{aligned}$$

5 a) Montrons par récurrence que :

la propriété  $\mathcal{P}_n : A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$  est vraie pour tout entier naturel  $n$

**Initialisation pour  $n = 0$  :**

On a  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3^0 & 2 \times 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0$

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc initialisée pour  $n = 0$

**Hérédité :** on suppose qu'il existe un entier  $k$  tel que  $\mathcal{P}_k$  soit vraie.

On a alors  $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k \times 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$  et