Auto-évaluation ex 6 page 115

Sésamath

Maths TS spécialité

Le mathématicien Andreï Markov remarqua qu'en moyenne, sur les 20 000 premières lettres d'un roman de Pouchkine, une voyelle sur huit suit une voyelle et une consonne sur trois suit une consonne.

1. Donner les probabilités qu'une consonne suive une voyelle et vice-versa.
2. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires valant 0 si la n-ième lettre est une voyelle et 1 sinon.
   a) Pour tous i et j valant 0 ou 1, déterminer les probabilités $P_{\{X_n=i\}}(\{X_{n+1}=j\})$.
   b) Exprimer $P(\{X_{n+1}=0\})$ et $P(\{X_{n+1}=1\})$ en fonction de $P(\{X_n=0\})$ et $P(\{X_n=1\})$.

1. Comme une voyelle sur 8 suit une voyelle alors

correction

1. Comme une voyelle sur 8 suit une voyelle alors

   7 fois sur 8 une voyelle suit une consonne

1. Comme une voyelle sur 8 suit une voyelle alors

   7 fois sur 8 une voyelle suit une consonne

   De plus, une consonne sur trois suit une consonne donc

correction

1. Comme une voyelle sur 8 suit une voyelle alors

   7 fois sur 8 une voyelle suit une consonne

   De plus, une consonne sur trois suit une consonne donc

   2 fois sur 3 une consonne suit une voyelle.

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\}) = \dfrac{1}{3}$.

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\}) = \dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{7}{8}$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\}) = \dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(\{X_{n+1}=0\})$

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\}) = \dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\{X_{n+1}=0\}) = P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=0\}) + P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=1\})$$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\ &= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\end{aligned}$$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\
&= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\\
&= \frac{1}{8}P(\{X_n=0\})+\frac{7}{8}P(\{X_n=1\})
\end{aligned}$$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\
&= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\\
&= \frac{1}{8}P(\{X_n=0\})+\frac{7}{8}P(\{X_n=1\})
\end{aligned}$$

et

$$P(\{X_{n+1}=1\})$$

correction

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\
&= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\\
&= \frac{1}{8}P(\{X_n=0\})+\frac{7}{8}P(\{X_n=1\})
\end{aligned}$$

et

$$P(\{X_{n+1}=1\}) = P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=1\})$$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})=\dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\
&= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\\
&= \frac{1}{8}P(\{X_n=0\})+\frac{7}{8}P(\{X_n=1\})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P(\{X_{n+1}=1\}) &= P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=0\})+P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=1\})\\
&= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})P(\{X_n=0\})+P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})P(\{X_n=1\})
\end{aligned}$$

2 a) $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})=\dfrac{2}{3}$ et $P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\}) = \dfrac{1}{3}$.

$P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{7}{8}$ et $P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\}) = \dfrac{1}{8}$.

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(\{X_{n+1}=0\}) &= P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=0\}) + P(\{X_{n+1}=0\}\cap\{X_n=1\})\\ &= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=0\}) + P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=0\})P(\{X_n=1\})\\ &= \frac{1}{8}P(\{X_n=0\}) + \frac{7}{8}P(\{X_n=1\})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}P(\{X_{n+1}=1\}) &= P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=0\}) + P(\{X_{n+1}=1\}\cap\{X_n=1\})\\ &= P_{\{X_n=0\}}(\{X_{n+1}=1\})P(\{X_n=0\}) + P_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1}=1\})P(\{X_n=1\})\\ &= \frac{2}{3}P(\{X_n=0\}) + \frac{1}{3}P(\{X_n=1\})\end{aligned}$$