Auto-évaluation ex 3 page 115

Sésamath

Maths TS spécialité

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Avec la calculatrice, calculer D^2 et D^3.
   b) Conjecturer l'expression de D^n.
   c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
2. Démontrer que $T^n = 0$ pour $n \geqslant 3$.

correction

1 a) Avec la calculatrice, on obtient :

1 a) Avec la calculatrice, on obtient :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

correction

1 a) Avec la calculatrice, on obtient :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

correction

1 a) Avec la calculatrice, on obtient :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) On conjecture :

correction

1 a) Avec la calculatrice, on obtient :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) On conjecture :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation pour $n = 1$

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation pour $n = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation pour $n = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation pour $n = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie

c) Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation pour $n = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie et

la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est initialisée au rang 1.

Hérédité :

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier k non nul tel que $(\mathcal{P}_k)$ soit vraie.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier k non nul tel que $(\mathcal{P}_k)$ soit vraie.

On a alors comme hypothèse de récurrence :

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier k non nul tel que $(\mathcal{P}_k)$ soit vraie.

On a alors comme hypothèse de récurrence :

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Or,

$$D^{k+1} = D^k \times D$$

correction

Ainsi :

correction

Ainsi :

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ {\color{red}0 \times 1 + \left(\sqrt{2}\right)^k \times 0 + 0 \times 0} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & {\color{red}1 \times 0 + 0 \times \sqrt{2} + 0 \times 0} & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \color{red}{0 \times 0 + \left(\sqrt{2}\right)^k \times \sqrt{2} + 0 \times 0} \; \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & {\color{red}0 \times 0 + 0 \times \sqrt{2} + 2^k \times 0} & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & {\color{red}1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2} \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & {\color{red}0 \times 0 + \left(\sqrt{2}\right)^k \times 0 + 0 \times 2} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0 \times 0 + 0 \times 0 + 2^k \times 2} \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

correction

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = D^{k+1}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = D^{k+1}$$

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

correction

Conclusion :

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang, elle est vraie pour tout entier naturel non nul.

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ étant initialisée au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang, elle est vraie pour tout entier naturel non nul.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

correction

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.

correction

2. Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.
On a alors comme hypothèse de récurrence : $T^k = 0$

correction

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.

On a alors comme hypothèse de récurrence : $T^k = 0$

Or,

$$T^{k+1} = T^k \times T = 0 \times T = 0$$

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.
On a alors comme hypothèse de récurrence : $T^k = 0$
Or,

$$T^{k+1} = T^k \times T = 0 \times T = 0$$

Conclusion :

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.
On a alors comme hypothèse de récurrence : $T^k = 0$
Or,

$$T^{k+1} = T^k \times T = 0 \times T = 0$$

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{Q}_n)$ étant initialisée au rang 3 et héréditaire à partir de ce rang, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$.

2 Montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{Q}_n) : T^n = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 3.$$

Initialisation pour $n = 3$

À l'aide de la calculatrice, on a bien $T^3 = 0$ donc $(\mathcal{Q}_3)$ est vraie et la propriété $(\mathcal{Q}_n)$ est initialisée au rang 3.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vraie.
On a alors comme hypothèse de récurrence : $T^k = 0$
Or,

$$T^{k+1} = T^k \times T = 0 \times T = 0$$

Conclusion :

La propriété $(\mathcal{Q}_n)$ étant initialisée au rang 3 et héréditaire à partir de ce rang, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$.
Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $T^n = 0$