QCM d'autoévaluation, exercice 54 page 140

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour n entier naturel, on donne $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$.

Soit (U_n) la suite de matrices définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$. Alors U_n est égale à :

a) $\begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^n} \\ -6 - \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{5}{3^n} \\ -3 - \frac{9}{2^n} + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{3^n} \\ -6 - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{3^n} \\ -3 - \frac{2}{3^n} \end{pmatrix}$

correction

correction

$$4 + \frac{1}{2^{0-2}} + \frac{1}{3^0} = 9 \neq 5$$

$$4 + \frac{1}{2^{0-2}} + \frac{1}{3^0} = 9 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$4 + \frac{1}{2^{0-2}} + \frac{1}{3^0} = 9 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$2 + \frac{3}{2^{0-1}} - \frac{5}{3^0} = 3 \neq 5$$

correction

$$4 + \frac{1}{2^{0-2}} + \frac{1}{3^0} = 9 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$2 + \frac{3}{2^{0-1}} - \frac{5}{3^0} = 3 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **c)**

correction

$$4 + \frac{1}{2^{0-2}} + \frac{1}{3^0} = 9 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$2 + \frac{3}{2^{0-1}} - \frac{5}{3^0} = 3 \neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **c)**

$$2 + \frac{1}{3^0} = 3 \neq 5$$

$$4+\frac{1}{2^{0-2}}+\frac{1}{3^0}=9\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$2+\frac{3}{2^{0-1}}-\frac{5}{3^0}=3\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **c)**

$$2+\frac{1}{3^0}=3\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **d)**

correction

$$4+\frac{1}{2^{0-2}}+\frac{1}{3^0}=9\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **a)**

$$2+\frac{3}{2^{0-1}}-\frac{5}{3^0}=3\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **c)**

$$2+\frac{1}{3^0}=3\neq 5$$

on peut donc

éliminer la réponse **d)**

La réponse correcte est :

réponse **b)**

Autre méthode

Autre méthode

Cherchons s'il existe une matrice C telle que

$$C = AC + B$$

Autre méthode

Cherchons s'il existe une matrice C telle que

$$C = AC + B$$

Or

$$C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$$

Autre méthode

Cherchons s'il existe une matrice C telle que

$$C = AC + B$$

Or

$$C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$$

Comme

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad det(A) = \frac{1}{3} \neq 0$$

Autre méthode

Cherchons s'il existe une matrice C telle que

$$C = AC + B$$

Or

$$C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$$

Comme

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad det(A) = \frac{1}{3} \neq 0$$

Alors $I - A$ est inversible et C existe :

$$C = (I - A)^{-1}B \qquad \text{soit} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$U_{n+1} = AU_n + B \qquad \text{et} \qquad C = AC + B$$

On a donc

$$U_{n+1} = AU_n + B \qquad \text{et} \qquad C = AC + B$$

On en déduit, par soustraction, que :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C)$$

On a donc

$$U_{n+1} = AU_n + B \qquad \text{et} \qquad C = AC + B$$

On en déduit, par soustraction, que :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C)$$

Posons, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - C$ alors :

$$V_{n+1} = AV_n$$

On a donc

$$U_{n+1} = AU_n + B \qquad \text{et} \qquad C = AC + B$$

On en déduit, par soustraction, que :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C)$$

Posons, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - C$ alors :

$$V_{n+1} = AV_n$$

et, pour tout entier naturel n,

$$V_n = A^n V_0 \qquad \text{avec} \qquad V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

correction

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\left(\frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n}\right) - 2\left(\frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right) \\ \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n}-\frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n}+\frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n}+\frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3^n} \\ 1\left(\frac{-6}{2^n}+\frac{6}{3^n}\right) - 2\left(\frac{-3}{2^n}+\frac{4}{3^n}\right) \end{array} \right.$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ -\frac{2}{3^n} \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ -\frac{2}{3^n} \end{pmatrix} = V_n$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ -\frac{2}{3^n} \end{pmatrix} = V_n$$

alors

$$U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 4 + \dfrac{1}{3^n} \\ -6 - \dfrac{2}{3^n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} \\ -\frac{2}{3^n} \end{pmatrix} = V_n$$

alors

$$U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 4 + \dfrac{1}{3^n} \\ -6 - \dfrac{2}{3^n} \end{pmatrix}$$

par conséquent la réponse exacte est :

réponse **b)**