QCM d'autoévaluation, exercice 53 page 140

Sésamath

Maths TS spécialité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour n entier naturel, on donne $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$.

Soit (U_n) la suite de matrices de terme général $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ définie par $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $U_n = \begin{pmatrix} \frac{6}{2^n} - \frac{5}{3^n} \\ \frac{10}{3^n} - \frac{9}{2^n} \end{pmatrix}$

c) $U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-1}} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{2}{3}$

On a :

On a :

$$\frac{6}{2^0} - \frac{5}{3^0} = 1 \neq a_0$$

correction

On a :

$$\frac{6}{2^0} - \frac{5}{3^0} = 1 \neq a_0$$

on peut donc

éliminer la réponse **b)**

correction

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

correction

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix}$$

correction

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\left(\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} 2\left(\frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n}\right) - 3\left(\frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right) \\ \end{matrix} \right.$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^nU_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ \\ \end{pmatrix}$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ 2\left(\frac{-6}{2^n} + \frac{6}{3^n}\right) - 3\left(\frac{-3}{2^n} + \frac{4}{3^n}\right) \end{pmatrix}$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^nU_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix}$$

correction

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = U_n$$

correction

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = U_n$$

donc

réponse **c)**

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = U_n$$

donc

réponse **c)**

On a 2 > 1 donc

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = U_n$$

donc

réponse **c)**

On a 2 > 1 donc

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

On a $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = U_0$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n} & \frac{2}{2^n} - \frac{2}{3^n} \\ -\frac{6}{2^n} + \frac{6}{3^n} & -\frac{3}{2^n} + \frac{4}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} \\ -\frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = U_n$$

donc

réponse **c)**

On a 2 > 1 donc

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (réponse **a)**)

correction

On a de plus :

On a de plus :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2}{2^n}}{\frac{-3}{2^n}} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$$

On a de plus :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2}{2^n}}{\frac{-3}{2^n}} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$$

on peut donc

éliminer la réponse **d)**

correction

On a de plus :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{2}{2^n}}{\dfrac{-3}{2^n}} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$$

on peut donc

éliminer la réponse **d)**

Les réponses correctes sont :

a) et **c)**