QCM d'autoévaluation, exercice 51 page 140

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,75 & -0,25 \end{pmatrix} \text{ et } D = P^{-1}AP$$

trois matrices et n un entier naturel.

La matrice A^n est égale à :

a) $\begin{pmatrix} -2\times 4^{-n} + 3\times 2^{-n} & -2\times 4^{-n} + 2^{-n+1} \\ -3\times 4^{-n} + 3\times 2^{-n} & -3\times 4^{-n} + 2^{-n+1} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -8^{-n} + 6^{-n} & -2^{-n+1} + 8^{-n} \\ -12^{-n} + 6^{-n} & -2^{-n+1} + 12^{-n} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2\times 4^{-n} + 3\times 2^{-n} & -2^{-n+1} + 2\times 4^{-n} \\ -3\times 4^{-n} + 3\times 2^{-n} & -2^{-n+1} + 3\times 4^{-n} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2^n} - \dfrac{2}{4^n} & \dfrac{2}{4^n} - \dfrac{4}{2^n} \\ \dfrac{3}{2^n} - \dfrac{3}{4^n} & \dfrac{3}{4^n} - \dfrac{4}{2^n} \end{pmatrix}$

Propriété

Soit une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \mathrm{diag}(d_1^n, d_2^n, \ldots, d_p^n)$.

Propriété

Soit une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \mathrm{diag}(d_1^n, d_2^n, \ldots, d_p^n)$.

On a alors

$$D^n = \begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ d'ordre p et n un entier naturel.
La puissance n-ième de D est la matrice $D^n = \mathrm{diag}(d_1^n, d_2^n, \ldots, d_p^n)$.

On a alors

$$D^n = \begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix}$$

De plus,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{red}{1 \times (0,5)^n + 2 \times 0} & \\ & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & \\ & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & \\ \color{red}{1 \times (0,5)^n + 3 \times 0} & \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & \\ (0,5)^n & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 1 \times 0 + 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 1 \times 0 + 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times(0,5)^n - 2\times(0,25)^n & \\ & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times(0,5)^n - 2\times(0,25)^n & \\ 3\times(0,5)^n - 3\times(0,25)^n & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times(0,5)^n - 2\times(0,25)^n & -2\times(0,5)^n + 2\times(0,25)^n \\ 3\times(0,5)^n - 3\times(0,25)^n & \end{pmatrix}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times(0,5)^n - 2\times(0,25)^n & -2\times(0,5)^n + 2\times(0,25)^n \\ 3\times(0,5)^n - 3\times(0,25)^n & -2\times(0,5)^n + 3\times(0,25)^n \end{pmatrix}$$

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times (0,5)^n - 2 \times (0,25)^n & -2 \times (0,5)^n + 2 \times (0,25)^n \\ 3 \times (0,5)^n - 3 \times (0,25)^n & -2 \times (0,5)^n + 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}$$

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2 \times (0,25)^n \\ (0,5)^n & 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times (0,5)^n - 2 \times (0,25)^n & -2 \times (0,5)^n + 2 \times (0,25)^n \\ 3 \times (0,5)^n - 3 \times (0,25)^n & -2 \times (0,5)^n + 3 \times (0,25)^n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}$$

Ainsi, $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^{-n} - 2 \times 4^{-n} & -2 \times 2^{-n} + 2 \times 4^{-n} \\ 3 \times 2^{-n} - 3 \times 4^{-n} & -2 \times 2^{-n} + 3 \times 4^{-n} \end{pmatrix}$ et

correction

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ alors :

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,25)^n \end{pmatrix} = D^n$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^n$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} (0,5)^n & 2\times(0,25)^n \\ (0,5)^n & 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times(0,5)^n - 2\times(0,25)^n & -2\times(0,5)^n + 2\times(0,25)^n \\ 3\times(0,5)^n - 3\times(0,25)^n & -2\times(0,5)^n + 3\times(0,25)^n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}$$

Ainsi, $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3\times 2^{-n} - 2\times 4^{-n} & -2\times 2^{-n} + 2\times 4^{-n} \\ 3\times 2^{-n} - 3\times 4^{-n} & -2\times 2^{-n} + 3\times 4^{-n} \end{pmatrix}$ et

la réponse correcte est : **c)**