Exercice 68 page 101

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

À l'aide des matrices mais sans l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants :

1. $$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ -1,8x + 0,8y = -9 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$$

correction

1

Écriture matricielle d'un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

1

Écriture matricielle d'un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système

$$\begin{cases} -4x+3y=2 \\ -x+y \quad =5 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

correction

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n. Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution : le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n. Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution : le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $det(A) = ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

correction

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n. Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution : le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $det(A) = ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour la matrice A, on a : $det(A) = -4 \times 1 - 3 \times (-1) = -1 \neq 0$

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n. Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution : le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $det(A) = ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour la matrice A, on a : $det(A) = -4 \times 1 - 3 \times (-1) = -1 \neq 0$

donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1\times 2+3\times 5\\ -1\times 2+4\times 5\end{pmatrix}\end{array}$$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 3 \times 5 \\ -1 \times 2 + 4 \times 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$

correction

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1\times 2 + 3\times 5 \\ -1\times 2 + 4\times 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$

Le système a donc pour solution le couple suivant : $(13\ ;\ 18)$

2. Le système

$$\begin{cases} 9x - 4y & = 2 \\ -1,8x + 0,8y & = -9 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1,8 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2 Le système

$$\begin{cases} 9x - 4y &= 2 \\ -1,8x + 0,8y &= -9 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1,8 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 9 \times 0,8 - (-1,8) \times (-4) = 0$$

2. Le système

$$\begin{cases} 9x - 4y & = 2 \\ -1,8x + 0,8y & = -9 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1,8 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 9 \times 0,8 - (-1,8) \times (-4) = 0$$

2 Le système

$$\begin{cases} 9x - 4y &= 2 \\ -1,8x + 0,8y &= -9 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1,8 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 9 \times 0,8 - (-1,8) \times (-4) = 0$$

donc A n'est pas inversible et on a deux possibilités : le système n'a pas de solution ou le système a une infinité de solutions.

Multiplions la deuxième équation du système par -5

correction

Multiplions la deuxième équation du système par -5 , on a alors

$$\begin{cases} 9x-4y & = \ 2 \\ -1,8x+0,8y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-4y = \ 2 \\ 9x-4y = 45 \end{cases}$$

Multiplions la deuxième équation du système par -5 , on a alors

$$\begin{cases} 9x-4y & = \ 2 \\ -1,8x+0,8y & = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-4y = \ 2 \\ 9x-4y = 45 \end{cases}$$

On aurait donc :

$$2 = 45$$

ce qui est impossible donc le système n'a pas de solution

3. Le système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Le système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 3\sqrt{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) - (-3) \times 3 = 0$$

3. Le système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 3\sqrt{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) - (-3) \times 3 = 0$$

3. Le système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 3\sqrt{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) - (-3) \times 3 = 0$$

donc A n'est pas inversible et on a deux possibilités : le système n'a pas de solution ou le système a une infinité de solutions.

Multiplions la deuxième équation du système par $-\sqrt{3}$

Multiplions la deuxième équation du système par $-\sqrt{3}$, on a alors

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x+3y = \sqrt{3} \\ -3x-\sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3}x+3y = \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x+3y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

correction

Multiplions la deuxième équation du système par $-\sqrt{3}$, on a alors

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x + 3y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

On aurait donc :

$$\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

ce qui est impossible donc le système n'a pas de solution

4. Le système

$$\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

4 Le système

$$\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 6 \times 1,5 - 1 \times 8 = 1 \neq 0$$

4 Le système

$$\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 6 \times 1,5 - 1 \times 8 = 1 \neq 0$$

4 Le système

$$\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, on a :

$$det(A) = 6 \times 1,5 - 1 \times 8 = 1 \neq 0$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

correction

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

correction

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,5 \times 8\,400 - 8 \times 1\,450 \\ -1 \times 8\,400 + 6 \times 1\,450 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,5 \times 8\,400 - 8 \times 1\,450 \\ -1 \times 8\,400 + 6 \times 1\,450 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 300 \end{pmatrix}$

correction

Le système considéré admet donc une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

Soit

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8\,400 \\ 1\,450 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1,5 \times 8\,400 - 8 \times 1\,450 \\ -1 \times 8\,400 + 6 \times 1\,450 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $X = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 300 \end{pmatrix}$

Le système a donc pour solution le couple suivant : $(1\,000\ ;\ 300)$