

# Auto-évaluation ex 1 page 83

*Sésamath*

Maths TS spécialité



Dans la gravure la *Melancolia* d'Albrecht Dürer, on peut voir le tableau de 4 lignes et de 4 colonnes suivant :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

On écrit un système correspondant à ce tableau où le second membre est toujours égal à 34 :

$$\begin{cases} 16x + 3y + 2z + 13t = 34 \\ 5x + 10y + 11z + 8t = 34 \\ 9x + 6y + 7z + 12t = 34 \\ 4x + 15y + 14z + t = 34 \end{cases}$$

- 1 Vérifier que  $(1 ; 1 ; 1 ; 1)$  est solution de ce système.
- 2 Soit  $a_{i,j}$  le coefficient situé dans la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne.  
Montrer que

$$\sum_{i=1}^4 a_{i,i} = \sum_{i=1}^4 a_{5-i,i}$$

- 3 La  $i$ -ième ligne du tableau devient la  $i$ -ième colonne d'un nouveau tableau.  
Écrire le nouveau système correspondant où le second membre est toujours égal à 34.

1 En remplaçant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  par 1, on a :

1 En remplaçant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  par 1, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 13 \times 1 = 34 \\ 5 \times 1 + 10 \times 1 + 11 \times 1 + 8 \times 1 = 34 \\ 9 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 1 + 12 \times 1 = 34 \\ 4 \times 1 + 15 \times 1 + 14 \times 1 + 1 = 34 \end{array} \right.$$

1 En remplaçant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  par 1, on a :

$$\begin{cases} 16 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 13 \times 1 & = & 34 \\ 5 \times 1 + 10 \times 1 + 11 \times 1 + 8 \times 1 & = & 34 \\ 9 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 1 + 12 \times 1 & = & 34 \\ 4 \times 1 + 15 \times 1 + 14 \times 1 + 1 & = & 34 \end{cases}$$

donc  $(1 ; 1 ; 1 ; 1)$  est solution de ce système.

2 Les coefficients de la **première ligne** sont :

2 Les coefficients de la **première ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ a_{1,1} = 16 & a_{1,2} = 3 & a_{1,3} = 2 & a_{1,4} = 13 \end{array}$$

2 Les coefficients de la **première ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ a_{1,1} = 16 & a_{1,2} = 3 & a_{1,3} = 2 & a_{1,4} = 13 \end{array}$$

Les coefficients de la **deuxième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ a_{2,1} = 5 & a_{2,2} = 10 & a_{2,3} = 11 & a_{2,4} = 8 \end{array}$$

2 Les coefficients de la **première ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{1,1} = 16 & a_{1,2} = 3 & a_{1,3} = 2 & a_{1,4} = 13
 \end{array}$$

Les coefficients de la **deuxième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{2,1} = 5 & a_{2,2} = 10 & a_{2,3} = 11 & a_{2,4} = 8
 \end{array}$$

Les coefficients de la **troisième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 1^{\text{ère}} \text{ colonne} & 2^{\text{ème}} \text{ colonne} & 3^{\text{ème}} \text{ colonne} & 4^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{3,1} = 9 & a_{3,2} = 6 & a_{3,3} = 7 & a_{3,4} = 12
 \end{array}$$

2 Les coefficients de la **première ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ colonne} & \text{2}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{3}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{4}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{1,1} = 16 & a_{1,2} = 3 & a_{1,3} = 2 & a_{1,4} = 13
 \end{array}$$

Les coefficients de la **deuxième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ colonne} & \text{2}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{3}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{4}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{2,1} = 5 & a_{2,2} = 10 & a_{2,3} = 11 & a_{2,4} = 8
 \end{array}$$

Les coefficients de la **troisième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ colonne} & \text{2}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{3}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{4}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{3,1} = 9 & a_{3,2} = 6 & a_{3,3} = 7 & a_{3,4} = 12
 \end{array}$$

Les coefficients de la **quatrième ligne** sont :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ colonne} & \text{2}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{3}^{\text{ème}} \text{ colonne} & \text{4}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
 a_{4,1} = 4 & a_{4,2} = 15 & a_{4,3} = 14 & a_{4,4} = 1
 \end{array}$$

2 On a alors :

$$\sum_{i=1}^4 a_{i,i} =$$

2 On a alors :

$$\sum_{i=1}^4 a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1\end{aligned}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=1}^4 a_{5-i,i} =$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=1}^4 a_{5-i,i} = a_{4,1} + a_{3,2} + a_{2,3} + a_{1,4}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{5-i,i} &= a_{4,1} + a_{3,2} + a_{2,3} + a_{1,4} \\ &= 4 + 6 + 11 + 13\end{aligned}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{5-i,i} &= a_{4,1} + a_{3,2} + a_{2,3} + a_{1,4} \\ &= 4 + 6 + 11 + 13 \\ &= 34\end{aligned}$$

2 On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{i,i} &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} \\ &= 16 + 10 + 7 + 1 \\ &= 34\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 a_{5-i,i} &= a_{4,1} + a_{3,2} + a_{2,3} + a_{1,4} \\ &= 4 + 6 + 11 + 13 \\ &= 34\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\sum_{i=1}^4 a_{i,i} = \sum_{i=1}^4 a_{5-i,i}$$

- 3 En échangeant lignes et colonnes, on a comme nouveau système :

$$\begin{cases} 16x + 5y + 9z + 4t & = & 34 \\ 3x + 10y + 6z + 15t & = & 34 \\ 2x + 11y + 7z + 14t & = & 34 \\ 13x + 8y + 12z + t & = & 34 \end{cases}$$