QCM d’autoévaluation, exercice 114 page 109

Sésamath

Maths TS spécialité

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on peut écrire $A^n = A + J$ avec J égale à :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

correction

On a :

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

correction

On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

correction

On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La seule réponse possible est donc :

correction

On a :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= A + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La seule réponse possible est donc :

réponse **c)**

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Initialisation pour $n = 1$

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Initialisation pour $n = 1$

$$A^1 = A$$

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Initialisation pour $n = 1$

$$A^1 = A$$

correction

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Initialisation pour $n = 1$

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ &= A + (1-1)M \end{aligned}$$

Démontrons pour n entier naturel non nul, par récurrence , la propriété

$$\mathscr{P}_n : A^n = A + (n-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n, $(n-1)M = J$

Initialisation pour $n = 1$

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ &= A + (1-1)M \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie.

On a alors comme hypothèse de récurrence :

$$A^k = A + (k-1)M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or :

$$A^{k+1} = A \times A^k$$

correction

Or :

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= A \times A^k \\
&= A[A + (k-1)M]
\end{aligned}
$$

correction

Or :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A[A + (k-1)M] \\ &= A^2 + (k-1)AM \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A[A+(k-1)M] \\ &= A^2+(k-1)AM \end{aligned}$$

Or, on remarque que

$$AM = M \text{ et } A^2 = A + M$$

correction

Or :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A[A+(k-1)M] \\ &= A^2+(k-1)AM \end{aligned}$$

Or, on remarque que

$$AM = M \text{ et } A^2 = A + M$$

donc

$$A^{k+1} = A + M + (k-1)M = A + (k+1-1)M$$

correction

Or :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A[A+(k-1)M] \\ &= A^2+(k-1)AM \end{aligned}$$

Or, on remarque que

$$AM = M \text{ et } A^2 = A + M$$

donc

$$A^{k+1} = A + M + (k-1)M = A + (k+1-1)M$$

Par conséquent $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :
La propriété $\mathscr{P}_n$ étant initialisée pour $n = 1$ et héréditaire à partir du rang 1, elle est vraie pour pour tout entier naturel n non nul.