

# Activités mentales ex 5 page 62

*Sésamath*

Maths TS spécialité



Soit  $a$  un entier naturel.  $13$  divise  $a^5$ .

Montrer que  $13^4$  divise  $\frac{a^5}{13}$ .

### Théorème de Gauss et nombres premiers

Un nombre premier divise un produit de facteurs si, et seulement si, il divise l'un de ces facteurs. Soit  $p$  un nombre premier et  $a, b$  deux entiers :

$p$  divise  $ab$  si, et seulement si,  $p$  divise  $a$  ou  $p$  divise  $b$ .

Ici 13 est premier et divise  $a^5$  alors

13 divise  $a$ .

Ici 13 est premier et divise  $a^5$  alors

13 divise  $a$ .

Il existe donc un entier  $k$  tel que

$$a = 13k$$

Ici 13 est premier et divise  $a^5$  alors

13 divise  $a$ .

Il existe donc un entier  $k$  tel que

$$a = 13k$$

En élevant à la puissance 5, on obtient :

$$a^5 = 13^5 \times k^5.$$

Ici 13 est premier et divise  $a^5$  alors

13 divise  $a$ .

Il existe donc un entier  $k$  tel que

$$a = 13k$$

En élevant à la puissance 5, on obtient :

$$a^5 = 13^5 \times k^5.$$

Ainsi,

$$\frac{a^5}{13} = 13^4 \times k^5 \text{ avec } \frac{a^5}{13} \text{ entier car 13 divise } a^5 \text{ et } k^5 \text{ entier.}$$

Ici 13 est premier et divise  $a^5$  alors

13 divise  $a$ .

Il existe donc un entier  $k$  tel que

$$a = 13k$$

En élevant à la puissance 5, on obtient :

$$a^5 = 13^5 \times k^5.$$

Ainsi,

$$\frac{a^5}{13} = 13^4 \times k^5 \text{ avec } \frac{a^5}{13} \text{ entier car 13 divise } a^5 \text{ et } k^5 \text{ entier.}$$

Par conséquent,

$$13^4 \text{ divise } \frac{a^5}{13}.$$