Exercice 36 page 63

Sésamath

Maths TS spécialité

CC BY-SA

CC BY-SA

énoncé

α et β sont deux entiers naturels et $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1. Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2. En déduire n.

CC BY-SA

Propriété

Soit un nombre n ($n \geq 2$) dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \cdots \times p_m^{\alpha m}.$$

Le nombre N de diviseurs est alors : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

CC BY-SA

correction

1. On a

CC BY-SA

1. On a

$$n^2 = \left(2^\alpha 3^\beta\right)^2$$

CC BY-SA

1. On a

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(2^\alpha 3^\beta\right)^2 \\ &= \left(2^\alpha\right)^2 \left(3^\beta\right)^2 \end{aligned}$$

CC BY-SA

1. On a

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(2^\alpha 3^\beta\right)^2 \\ &= \left(2^\alpha\right)^2 \left(3^\beta\right)^2 \\ n^2 &= 2^{2\alpha} 3^{2\beta} \end{aligned}$$

CC BY-SA

1. On a

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(2^\alpha 3^\beta\right)^2 \\ &= (2^\alpha)^2 \left(3^\beta\right)^2 \\ n^2 &= 2^{2\alpha} 3^{2\beta} \end{aligned}$$

Par conséquent, le nombre de diviseurs de n^2 est

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1)$$

CC BY-SA

correction

Le nombre de diviseurs de $n = 2^\alpha 3^\beta$ est

$$(\alpha+1)(\beta+1)$$

BY-SA

correction

Le nombre de diviseurs de $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$ est

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

Or, le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n donc :

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

BY-SA

correction

Le nombre de diviseurs de $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$ est

$$(\alpha+1)(\beta+1)$$

Or, le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n donc :

$$(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1)$$

En raisonnant par équivalences, on a :

$$(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1) \Leftrightarrow 4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1 = 3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$$

CC BY-SA

Le nombre de diviseurs de $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$ est

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

Or, le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n donc :

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

En raisonnant par équivalences, on a :

$$\begin{aligned}(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1) &\Leftrightarrow 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3\end{aligned}$$

BY-SA

correction

Le nombre de diviseurs de $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$ est

$$(\alpha+1)(\beta+1)$$

Or, le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n donc :

$$(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1)$$

En raisonnant par équivalences, on a :

$$\begin{aligned}(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1) &\Leftrightarrow 4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1 = 3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3\\ &\Leftrightarrow \alpha\beta-\alpha-\beta+1 = 3\\ &\Leftrightarrow (\alpha-1)(\beta-1) = 3\end{aligned}$$

CC BY-SA

Le nombre de diviseurs de $n = 2^{\alpha}3^{\beta}$ est

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

Or, le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n donc :

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

En raisonnant par équivalences, on a :

$$\begin{aligned}(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1) &\Leftrightarrow 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3\end{aligned}$$

On a donc bien

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

BY-SA

2. Comme $(\alpha-1)(\beta-1)=3$ alors

3 divise $\alpha-1$ ou 3 divise $\beta-1$

CC BY-SA

2. Comme $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$ alors

$$3 \text{ divise } \alpha - 1 \text{ ou } 3 \text{ divise } \beta - 1$$

Deux choix sont alors possibles :

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases}$$

BY-SA

2. Comme $(\alpha-1)(\beta-1)=3$ alors

3 divise $\alpha-1$ ou 3 divise $\beta-1$

Deux choix sont alors possibles :

$$\begin{cases}\alpha-1=3\\ \beta-1=1\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\alpha-1=1\\ \beta-1=3\end{cases}$$

On obtient

$$\alpha=4,\ \beta=2 \quad \text{ou} \quad \alpha=2,\ \beta=4.$$

CC BY-SA

2 Comme $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$ alors

3 divise $\alpha - 1$ ou 3 divise $\beta - 1$

Deux choix sont alors possibles :

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases}$$

On obtient

$$\alpha = 4,\ \beta = 2 \quad \text{ou} \quad \alpha = 2,\ \beta = 4.$$

Les valeurs de n possibles sont :

$$n = 2^4 \times 3^2 = 144 \quad \text{ou} \quad n = 2^2 \times 3^4 = 324.$$

CC BY-SA