énoncé

En optimisant la décomposition en produit de facteurs premiers, déterminer les entiers naturels, compris entre 2 et 100, qui possèdent le plus de diviseurs.

Propriété

Soit un nombre n ($n \geq 2$) dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}.$$

Le nombre N de diviseurs est alors : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

correction

On a

$$\sqrt{100} = 10$$

On a

$$\sqrt{100} = 10$$

La décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, n, compris entre 2 et 100 est donc :

$$n = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times 7^{\alpha_4}$$

avec

$$\alpha_1 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}, \alpha_2 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\},$$
$$\alpha_3 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\} \text{ et } \alpha_4 \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$$

On a

$$\sqrt{100} = 10$$

La décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, n, compris entre 2 et 100 est donc :

$$n = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times 7^{\alpha_4}$$

avec

$$\alpha_1 \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}, \alpha_2 \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\},$$
$$\alpha_3 \in \{0\,;\,1\,;\,2\} \text{ et } \alpha_4 \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$$

et il faut avoir $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)$ le plus grand possible

avec 1 diviseur premier :

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2^3 \times 3^2 = 72$, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2^3 \times 3^2 = 72$, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

avec 3 diviseurs premiers :

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2^3 \times 3^2 = 72$, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

avec 3 diviseurs premiers :

1. $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, soit $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs.

correction

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2^3 \times 3^2 = 72$, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

avec 3 diviseurs premiers :

1. $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, soit $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2 \times 3^2 \times 5 = 90$, soit $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs.

avec 1 diviseur premier :

1. $2^6 = 64$, soit 7 diviseurs.

avec 2 diviseurs premiers :

1. $2^5 \times 3 = 96$, soit $6 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2^3 \times 3^2 = 72$, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

avec 3 diviseurs premiers :

1. $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, soit $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs.
2. $2 \times 3^2 \times 5 = 90$, soit $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs.

Les nombres qui possèdent le plus de diviseurs et qui sont compris entre 2 et 100 sont

60, 72, 90 et 96.