Exercice 28 page 39

Sésamath

Maths TS spécialité

Montrer que 17 et 40 sont premiers entre eux puis déterminer un couple d'entiers relatifs $(x;y)$ tel que : $17x - 40y = 1$.

correction

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$40 = 17 \times 2 + 6 \quad (\mathscr{L}_1)$$

correction

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
40 & = & 17 & \times & 2 & + & 6 & & (\mathscr{L}_1) \\
17 & = & 6 & \times & 2 & + & 5 & & (\mathscr{L}_2)
\end{array}
$$

correction

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$40 = 17 \times 2 + 6 \quad (\mathscr{L}_1)$$

$$17 = 6 \times 2 + 5 \quad (\mathscr{L}_2)$$

$$6 = 5 \times 1 + 1 \quad (\mathscr{L}_3)$$

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ccccccccl}
40 & = & 17 & \times & 2 & + & 6 & & (\mathscr{L}_1) \\
17 & = & 6 & \times & 2 & + & 5 & & (\mathscr{L}_2) \\
6 & = & 5 & \times & 1 & + & 1 & & (\mathscr{L}_3) \\
5 & = & 1 & \times & 5 & + & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ccccccccc} 40 & = & 17 & \times & 2 & + & 6 & & (\mathscr{L}_1) \\ 17 & = & 6 & \times & 2 & + & 5 & & (\mathscr{L}_2) \\ 6 & = & 5 & \times & 1 & + & 1 & & (\mathscr{L}_3) \\ 5 & = & 1 & \times & 5 & + & \boxed{0} & & \end{array}$$

donc

PGCD(40 , 17) = 1 .

Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{ccccccccc} 40 & = & 17 & \times & 2 & + & 6 & & (\mathscr{L}_1) \\ 17 & = & 6 & \times & 2 & + & 5 & & (\mathscr{L}_2) \\ 6 & = & 5 & \times & 1 & + & 1 & & (\mathscr{L}_3) \\ 5 & = & 1 & \times & 5 & + & \boxed{0} & & \end{array}$$

donc

PGCD(40 , 17) = 1 .

Ainsi,

40 et 17 sont premiers entre eux.

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$1 = 6 - 5 \times 1$ j'isole 1 dans $(\mathscr{L}_3)$

correction

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3) \\ &= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace} \end{aligned}$$

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3) \\ &= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace} \\ &= 3 \times 6 + (-1) \times 17 \end{aligned}$$

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$
\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3) \\
&= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace} \\
&= 3 \times 6 + (-1) \times 17 && \\
&= 3 \times (40 - 17 \times 2) + (-1) \times 17 && \text{j'isole 6 dans } (\mathscr{L}_1) \text{ et je remplace}
\end{aligned}
$$

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3) \\
&= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace} \\
&= 3 \times 6 + (-1) \times 17 && \\
&= 3 \times (40 - 17 \times 2) + (-1) \times 17 && \text{j'isole 6 dans } (\mathscr{L}_1) \text{ et je remplace} \\
1 &= 3 \times 40 + (-7) \times 17 &&
\end{aligned}$$

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3) \\
&= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace} \\
&= 3 \times 6 + (-1) \times 17 && \\
&= 3 \times (40 - 17 \times 2) + (-1) \times 17 && \text{j'isole 6 dans } (\mathscr{L}_1) \text{ et je remplace} \\
1 &= 3 \times 40 + (-7) \times 17 &&
\end{aligned}$$

On a donc :

$$17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$$

Remontons maintenant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \times 1 && \text{j'isole 1 dans } (\mathscr{L}_3)\\
&= 6 - (17 - 6 \times 2) \times 1 && \text{j'isole 5 dans } (\mathscr{L}_2) \text{ et je remplace}\\
&= 3 \times 6 + (-1) \times 17 &&\\
&= 3 \times (40 - 17 \times 2) + (-1) \times 17 && \text{j'isole 6 dans } (\mathscr{L}_1) \text{ et je remplace}\\
1 &= 3 \times 40 + (-7) \times 17 &&
\end{aligned}$$

On a donc :

$$17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$$

Le couple d'entiers (–7 ; –3) est tel que $17x - 40y = 1$