Auto-évaluation ex 4 page 27

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Un nombre entier a est divisible par 6 et 9, donc a est divisible par 54.
2. Un nombre entier a est divisible par 8 et 9, donc a est divisible par 72.
3. Un nombre entier a est divisible par 4 et 18, donc $a \equiv 36\ (36)$.
4. Un nombre entier a est divisible par 10 et 15, donc $a \equiv 0\ (150)$.

1 **FAUX** :

1. **FAUX** :

   contre-exemple :

$$a = 18$$

1. **FAUX** :
   contre-exemple :

$$a = 18$$

On a bien

6 et 9 divisent 18

1. **FAUX** :
contre-exemple :
$$a = 18$$
On a bien
$$\text{6 et 9 divisent 18}$$
mais
$$\text{54 ne divise pas 18}$$

2 **VRAI** :

2 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 8 et par 9.

2 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 8 et par 9.

Comme 8 divise a, il existe un entier k tel que

$$a = 8k$$

2 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 8 et par 9.

Comme 8 divise a, il existe un entier k tel que

$$a = 8k$$

Montrons que k est divisible par 9.

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 9.

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 9.
On a alors

$$k \equiv r \pmod 9 \text{ avec } r \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 9.
On a alors

$$k \equiv r \pmod 9 \text{ avec } r \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$$

Ainsi par compatibilité des congruences avec le produit :

$$a \equiv 8r \pmod 9$$

correction

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 9.
On a alors

$$k \equiv r \pmod 9 \text{ avec } r \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$$

Ainsi par compatibilité des congruences avec le produit :

$$a \equiv 8r \pmod 9$$

Dressons alors un tableau de congruences :

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$8r$	8	16	24	32	40	48	56	64
$a \equiv ... \pmod 9$	8	7	6	5	4	3	2	1

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 9.
On a alors

$$k \equiv r \pmod 9 \text{ avec } r \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$$

Ainsi par compatibilité des congruences avec le produit :

$$a \equiv 8r \pmod 9$$

Dressons alors un tableau de congruences :

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$8r$	8	16	24	32	40	48	56	64
$a \equiv \ldots \pmod 9$	8	7	6	5	4	3	2	1

Comme a n'est jamais congru à 0 modulo 9, a n'est pas divisible par 9
Ceci est contradictoire avec l'hypothèse de départ donc k est divisible par 9.

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 9k'$$

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 9k'$$

donc

$$a = 8 \times 9k' = 72k'$$

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 9k'$$

donc

$$a = 8 \times 9k' = 72k'$$

Ainsi

a est divisible par 72

3 **VRAI** :

3 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 4 et par 18.

3 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 4 et par 18.

Comme 18 divise a, il existe un entier k tel que

$$a = 18k$$

3 **VRAI** :

Soit a un entier divisible par 4 et par 18.

Comme 18 divise a, il existe un entier k tel que

$$a = 18k$$

Montrons que k est divisible par 2.

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.

correction

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

correction

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

Ainsi :

$$a = 18(2q+1)$$

correction

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a &= 18(2q+1) \\ &= 36q + 18 \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} a & = & 18(2q+1) \\ & = & 36q+18 \\ a & = & 4(9q+4)+2 \end{array}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} a & = & 18(2q+1) \\ & = & 36q+18 \\ a & = & 4(9q+4)+2 \end{array}$$

et comme $2 \neq 0$

$$a \text{ n'est pas divisible par } 4$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que k n'est pas divisible par 2.
On a alors

$$k = 2q + 1 \text{ avec } q \text{ entier}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} a & = & 18(2q+1) \\ & = & 36q+18 \\ a & = & 4(9q+4)+2 \end{array}$$

et comme $2 \neq 0$

$$a \text{ n'est pas divisible par 4}$$

Ceci est contradictoire avec l'hypothèse de départ donc k est divisible par 2.

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 2k'$$

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 2k'$$

donc

$$a = 18 \times 2k' = 36k'$$

Ainsi, il existe un entier k' tel que

$$k = 2k'$$

donc

$$a = 18 \times 2k' = 36k'$$

Ainsi

$$a \equiv 0 \pmod{36}$$

soit

$$a \equiv 36 \pmod{36}$$

4 **FAUX** :

4. **FAUX** :

   contre-exemple :

$$a = 30$$

4. **FAUX** :
contre-exemple :

$$a = 30$$

On a bien

10 et 15 divisent 30

4. **FAUX** :
contre-exemple :

$$a = 30$$

On a bien

10 et 15 divisent 30

mais

150 ne divise pas 30

4. **FAUX** :
contre-exemple :

$$a = 30$$

On a bien

10 et 15 divisent 30

mais

150 ne divise pas 30

mais

On n'a donc pas $a \equiv 0 \pmod{150}$