QCM d'autoévaluation, exercice 69 page 46

Sésamath

Maths TS spécialité

Relever les affirmations vraies.

a) Si le PGCD$(a, b) = 1,$ alors PGCD$(a + b\ ;\ b) = 1$.

b) Il existe deux naturels a et b tels que la somme vaut 150 et PGCD$(a, b) = 8$.

c) Deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

d) L'équation $51x + 39y = 2016$ admet des solutions entières.

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\,;\,b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\,;\,b)$$

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\,;\,b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\,;\,b)$$

On a d' divise $a+b$ et d' divise b donc

$$d' \text{ divise } (a+b)-b$$

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\,;\,b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\,;\,b)$$

On a d' divise $a+b$ et d' divise b donc

$$d' \text{ divise } (a+b)-b$$

soit

$$d' \text{ divise } a$$

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\,;\,b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\,;\,b)$$

On a d' divise $a+b$ et d' divise b donc

$$d' \text{ divise } (a+b)-b$$

soit

$$d' \text{ divise } a$$

Comme, de plus, d' divise b alors

$$d' \text{ divise } d \text{ qui vaut } 1$$

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\ ;\ b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\ ;\ b)$$

On a d' divise $a+b$ et d' divise b donc

$$d' \text{ divise } (a+b) - b$$

soit

$$d' \text{ divise } a$$

Comme, de plus, d' divise b alors

$$d' \text{ divise } d \text{ qui vaut } 1$$

Ainsi,

$$d' = 1$$

correction

On pose :

$$d = \text{PGCD}(a\,;\,b) \qquad \text{et} \qquad d' = \text{PGCD}(a+b\,;\,b)$$

On a d' divise $a+b$ et d' divise b donc

$$d' \text{ divise } (a+b)-b$$

soit

$$d' \text{ divise } a$$

Comme, de plus, d' divise b alors

$$d' \text{ divise } d \text{ qui vaut } 1$$

Ainsi,

$$d' = 1$$

Par conséquent,

l'affirmation **a)** est vraie.

correction

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b=150 \\ \text{PGCD}(a\,;\,b)=8 \end{cases} \qquad (*)$$

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a + b = 150 & \qquad (*) \\ \text{PGCD}(a\,;\,b) = 8 \end{cases}$$

Comme $\text{PGCD}(a\,;\,b) = 8$, il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :

$$a = 8k \quad \text{et} \quad b = 8k'$$

correction

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b=150 & \qquad (*) \\ \text{PGCD}(a\,;\,b)=8 \end{cases}$$

Comme PGCD$(a\,;\,b)=8$, il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :

$$a=8k \quad \text{et} \quad b=8k'$$

En remplaçant dans (*), on obtient :

$$8k+8k'=150$$

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b=150 & \qquad (*) \\ \text{PGCD}(a\,;\,b)=8 \end{cases}$$

Comme $\text{PGCD}(a\,;\,b)=8$, il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :

$$a=8k \quad \text{et} \quad b=8k'$$

En remplaçant dans (*), on obtient :

$$8k+8k'=150$$

soit

$$4(k+k')=75$$

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b=150 & (*) \\ \text{PGCD}(a\ ;\ b)=8 \end{cases}$$

Comme $\text{PGCD}(a\ ;\ b)=8$, il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :

$$a=8k \quad \text{et} \quad b=8k'$$

En remplaçant dans (*), on obtient :

$$8k+8k'=150$$

soit

$$4(k+k')=75$$

On en déduit alors que

4 divise 75

ce qui est absurde.

On cherche deux entiers a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b=150 & (*) \\ \text{PGCD}(a\,;\,b)=8 \end{cases}$$

Comme $\text{PGCD}(a\,;\,b)=8$, il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :

$$a=8k \quad \text{et} \quad b=8k'$$

En remplaçant dans (*), on obtient :

$$8k+8k'=150$$

soit

$$4(k+k')=75$$

On en déduit alors que

4 divise 75

ce qui est absurde.

Par conséquent,

l'affirmation **b)** est fausse.

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k + 1 \text{ et } 2k + 3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k + 1$ et $2k + 3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k + 3) - (2k + 1)$$

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k+1$ et $2k+3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k+3)-(2k+1)$$

soit

$$d \text{ divise } 2.$$

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k+1$ et $2k+3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k+3)-(2k+1)$$

soit

$$d \text{ divise } 2.$$

On en déduit alors que

$$d=1 \text{ ou } d=2$$

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k+1$ et $2k+3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k+3)-(2k+1)$$

soit

$$d \text{ divise } 2.$$

On en déduit alors que

$$d = 1 \text{ ou } d = 2$$

Or $d = 2$ est absurde car d est le PGCD de deux nombres impairs.

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k+1$ et $2k+3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k+3)-(2k+1)$$

soit

$$d \text{ divise } 2.$$

On en déduit alors que

$$d = 1 \text{ ou } d = 2$$

Or $d = 2$ est absurde car d est le PGCD de deux nombres impairs.

Ainsi, $d = 1$.

correction

Deux entiers consécutifs impairs sont de la forme :

$$2k+1 \text{ et } 2k+3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Notons d leur PGCD.

Comme d divise $2k+1$ et $2k+3$ alors :

$$d \text{ divise } (2k+3)-(2k+1)$$

soit

$$d \text{ divise } 2.$$

On en déduit alors que

$$d=1 \text{ ou } d=2$$

Or $d=2$ est absurde car d est le PGCD de deux nombres impairs.

Ainsi, $d=1$.

Par conséquent,

l'affirmation **c)** est vraie.

On a :

$$\text{PGCD}(51\ ;\ 39) = 3$$

On a :

$$\text{PGCD}(51\ ;\ 39) = 3$$

Or

3 divise 2 016

alors :

l'équation $51x + 39y = 2016$ admet des solutions entières.

On a :

$$\text{PGCD}(51\ ;\ 39) = 3$$

Or

3 divise 2 016

alors :

l'équation $51x + 39y = 2016$ admet des solutions entières.

Par conséquent,

l'affirmation **d)** est vraie.