

Exercice 31 page 17

Sésamath

Maths TS spécialité



- 1 Quels sont les restes possibles de la division de 3^n par 11 ?
- 2 En déduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$
- 5 si $n = 5k + 3$

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$
- 9 si $n = 5k + 2$
- 4 si $n = 5k + 4$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 5 si $n = 5k + 3$

- 1 Commençons par conjecturer les restes possibles de la division de 3^n par 11.

Pour cela, dressons un tableau des restes de la division euclidienne par 11 de 3^n selon les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5
3^n	1	3	9	27	81	243
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4	1

On s'arrête car une certaine périodicité apparaît que l'on peut traduire ainsi :
le reste division euclidienne par 11 de 3^n est (k est un entier naturel) :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$
- 5 si $n = 5k + 3$
- 4 si $n = 5k + 4$

Remarque : on aurait pu conjecturer ce résultat plus rapidement à l'aide d'un tableau.

Démontrons maintenant la conjecture précédente :

Démontrons maintenant la conjecture précédente :

Soit n un entier naturel, dans la division euclidienne par 5, on a :

Démontrons maintenant la conjecture précédente :

Soit n un entier naturel, dans la division euclidienne par 5, on a :

$$n = 5k + r \text{ avec } k \text{ entier naturel et } 0 \leq r < 5$$

Démontrons maintenant la conjecture précédente :

Soit n un entier naturel, dans la division euclidienne par 5, on a :

$$n = 5k + r \text{ avec } k \text{ entier naturel et } 0 \leq r < 5$$

Ainsi,

$$3^n = 3^{5k+r} = (3^5)^k \times 3^r$$

Démontrons maintenant la conjecture précédente :

Soit n un entier naturel, dans la division euclidienne par 5, on a :

$$n = 5k + r \text{ avec } k \text{ entier naturel et } 0 \leq r < 5$$

Ainsi,

$$3^n = 3^{5k+r} = (3^5)^k \times 3^r$$

or,

$$3^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

alors pour tout entier naturel k , $a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

alors pour tout entier naturel k , $a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

on a :

$$(3^5)^k \equiv 1^k \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

alors pour tout entier naturel k , $a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

on a :

$$(3^5)^k \equiv 1^k \pmod{11}$$

soit :

$$(3^5)^k \equiv 1 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a, b, c et d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

alors $ac \equiv bd \pmod{n}$,

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a, b, c et d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

alors $ac \equiv bd \pmod{n}$,

on a :

$$(3^5)^k \times 3^r \equiv 1 \times 3^r \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a, b, c et d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

alors $ac \equiv bd \pmod{n}$,

on a :

$$(3^5)^k \times 3^r \equiv 1 \times 3^r \pmod{11}$$

soit :

$$3^n \equiv 3^r \pmod{11}$$

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

- 1 si $n = 5k$

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$
- 5 si $n = 5k + 3$

On vient ainsi de prouver que le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est le même que celui de la division euclidienne de 3^r par 11 où r est le reste de la division euclidienne de n par 5

Ainsi, d'après notre tableau des conjectures, le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 est :

- 1 si $n = 5k$
- 3 si $n = 5k + 1$
- 9 si $n = 5k + 2$
- 5 si $n = 5k + 3$
- 4 si $n = 5k + 4$

2 Dressons le tableau de congruences de $3^n + 7$ modulo 11 .

2 Dressons le tableau de congruences de $3^n + 7$ modulo 11 .

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

- 2 Dressons le tableau de congruences de $3^n + 7$ modulo 11 .

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

reste division euclidienne par 5 de n	0	1	2	3	4
reste division euclidienne par 11 de 3^n	1	3	9	5	4
reste division euclidienne par 11 de $3^n + 7$	8	10	5	1	0

Explication : par exemple si $3^n \equiv 9 \pmod{11}$,
 alors, par compatibilité avec la somme,
 $3^n + 7 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$.

D'après le tableau, les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11 sont :
les entiers de la forme $n = 5k + 4$ avec k entier naturel

D'après le tableau, les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11 sont :
les entiers de la forme $n = 5k + 4$ avec k entier naturel

Remarque : Un tableau de congruence donnant de manière exhaustive tous les résultats possibles,

pour que $3^n + 7$ soit divisible par 11 ($3^n + 7 \equiv 0 \pmod{11}$),
la seule possibilité est $n \equiv 4 \pmod{5}$.