Activités mentales ex 2 page 16

Sésamath

Maths TS spécialité

CC BY-SA

CC BY-SA

énoncé

À quelle condition un nombre est-il divisible par 6 ?
À l'aide d'une factorisation, montrer que $a(a^2-1)$ est divisible par 6 pour tout entier relatif a.

BY-SA

Un nombre est divisible par 6 si, et seulement si, il est divisible par 2 et par 3.

cc BY-SA

Un nombre est divisible par 6 si, et seulement si, il est divisible par 2 et par 3.

Remarque : ce résultat semble trivial mais ce n'est pas pour cela qu'il ne faut pas le démontrer !

CC BY-SA

correction

Un nombre est divisible par 6 si, et seulement si, il est divisible par 2 et par 3.

Remarque : ce résultat semble trivial mais ce n’est pas pour cela qu’il ne faut pas le démontrer !
Méfiez-vous des résultats qui paraissent évident mais qui sont faux !

BY-SA

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

CC BY-SA

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6

CC BY-SA

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6
alors il existe un entier k tel que $n = 6k$.

CC BY-SA

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6
alors il existe un entier k tel que $n = 6k$.
ainsi $n = 2 \times 3 \times k$

BY-SA

correction

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6
alors il existe un entier k tel que $n = 6k$.
ainsi $n = 2 \times 3 \times k$
Comme $3k$ est un entier n est divisible par 2

CC BY-SA

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6
alors il existe un entier k tel que $n = 6k$.
ainsi $n = 2 \times 3 \times k$
Comme $3k$ est un entier n est divisible par 2
Comme $2k$ est un entier n est divisible par 3

CC BY-SA

correction

Preuve : Nous devons démontrer une **équivalence**, nous allons donc procéder par **double implication**.

Si n est divisible par 6
alors il existe un entier k tel que $n = 6k$.
ainsi $n = 2 \times 3 \times k$
Comme $3k$ est un entier n est divisible par 2
Comme $2k$ est un entier n est divisible par 3

On vient donc de montrer que

si n est divisible par 6 alors n est divisible par 2 et par 3.

CC BY-SA

correction

Si n est divisible par 2 et par 3

CC BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

$$\text{il existe deux entiers } k \text{ et } r \text{ tels que } n = 6k + r \text{ avec } 0 \leq r < 6.$$

BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

$$\text{il existe deux entiers } k \text{ et } r \text{ tels que } n = 6k + r \text{ avec } 0 \leq r < 6.$$

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.

BY-SA

correction

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

$$\text{il existe deux entiers } k \text{ et } r \text{ tels que } n = 6k + r \text{ avec } 0 \leq r < 6.$$

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.

Or, 2 divise n et 2 divise 6 donc par combinaison linéaire, 2 divise $n - 6k$ soit

$$2 \text{ divise } r$$

BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

il existe deux entiers k et r tels que $n = 6k + r$ avec $0 \leq r < 6$.

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.

Or, 2 divise n et 2 divise 6 donc par combinaison linéaire, 2 divise $n - 6k$ soit

2 divise r

De plus, 3 divise n et 3 divise 6 donc par combinaison linéaire, 3 divise $n - 6k$ soit

3 divise r

CC BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

$$\text{il existe deux entiers } k \text{ et } r \text{ tels que } n = 6k + r \text{ avec } 0 \leq r < 6.$$

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.

Or, 2 divise n et 2 divise 6 donc par combinaison linéaire, 2 divise $n - 6k$ soit

$$2 \text{ divise } r$$

De plus, 3 divise n et 3 divise 6 donc par combinaison linéaire, 3 divise $n - 6k$ soit

$$3 \text{ divise } r$$

Par conséquent, r est un multiple de 2 et de 3 et $0 \leq r < 6$.

BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

il existe deux entiers k et r tels que $n = 6k + r$ avec $0 \leq r < 6$.

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.
Or, 2 divise n et 2 divise 6 donc par combinaison linéaire, 2 divise $n - 6k$ soit

2 divise r

De plus, 3 divise n et 3 divise 6 donc par combinaison linéaire, 3 divise $n - 6k$ soit

3 divise r

Par conséquent, r est un multiple de 2 et de 3 et $0 \leq r < 6$.
Alors $r = 0$ et 6 divise n.

CC BY-SA

Si n est divisible par 2 et par 3

D'après la division euclidienne,

il existe deux entiers k et r tels que $n = 6k + r$ avec $0 \leq r < 6$.

Ainsi $r = n - 6k$ avec $0 \leq r < 6$.

Or, 2 divise n et 2 divise 6 donc par combinaison linéaire, 2 divise $n - 6k$ soit

2 divise r

De plus, 3 divise n et 3 divise 6 donc par combinaison linéaire, 3 divise $n - 6k$ soit

3 divise r

Par conséquent, r est un multiple de 2 et de 3 et $0 \leq r < 6$.

Alors $r = 0$ et 6 divise n.

On vient donc de montrer que

si n est divisible par 2 et 3 alors n est divisible par 6.

cc BY-SA

On a donc l'équivalence

n est divisible par 6 si, et seulement si, n est divisible par 2 et 3.

BY-SA

On a :

$$n = a(a^2 - 1)$$

$$n = a(a-1)(a+1)$$

BY-SA

On a :

$$\begin{aligned} n &= a(a^2-1) \\ n &= a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 entiers consécutifs donc

BY-SA

On a :

$$\begin{aligned} n &= a(a^2-1) \\ n &= a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 entiers consécutifs donc

l'un au moins est divisible par 2

BY-SA

On a :

$$\begin{aligned} n &= a(a^2-1) \\ n &= a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 entiers consécutifs donc

l'un au moins est divisible par 2 et l'un au moins est divisible par 3

BY-SA

correction

On a :

$$\begin{aligned} n &= a(a^2-1) \\ n &= a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 entiers consécutifs donc

l'un au moins est divisible par 2 et l'un au moins est divisible par 3

Ainsi, n est divisible par 2 et par 3.

CC BY-SA

correction

On a :

$$n = a(a^2 - 1)$$

$$n = a(a-1)(a+1)$$

a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 entiers consécutifs donc

l'un au moins est divisible par 2 et l'un au moins est divisible par 3

Ainsi, n est divisible par 2 et par 3.

Par conséquent, n est divisible par 6.

CC BY-SA