Exercice 29 page 17

Sésamath

Maths TS spécialité

Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$5^{4k} - 1 \text{ divisible par } 13.$$

On a :

$$5^{4k} =$$

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k$$

correction

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k$$

correction

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

correction

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

Or,

$$25 \equiv -1 \pmod{13}$$

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

Or,

$$25 \equiv -1 \pmod{13}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

Or,

$$25 \equiv -1 \pmod{13}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

correction

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

Or,

$$25 \equiv -1 \pmod{13}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :
$$a \equiv b \pmod{n}$$
alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

on a :

$$25^2 \equiv (-1)^2 \pmod{13}$$

On a :

$$5^{4k} = \left(5^4\right)^k = \left(\left(5^2\right)^2\right)^k = \left(25^2\right)^k$$

Or,

$$25 \equiv -1 \pmod{13}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod{n}$
alors pour tout entier naturel k, $a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

on a :

$$25^2 \equiv (-1)^2 \pmod{13}$$

soit :

$$25^2 \equiv 1 \pmod{13}$$

correction

En appliquant, de nouveau, la compatibilité de la congruence avec les puissances :

correction

En appliquant, de nouveau, la compatibilité de la congruence avec les puissances :
on a pour tout entier naturel k :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1^k \pmod{13}$$

En appliquant, de nouveau, la compatibilité de la congruence avec les puissances :
on a pour tout entier naturel k :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1^k \pmod{13}$$

soit :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1 \pmod{13}$$

En appliquant, de nouveau, la compatibilité de la congruence avec les puissances :
on a pour tout entier naturel k :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1^k \pmod{13}$$

soit :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1 \pmod{13}$$

On en déduit que :

$$\left(25^2\right)^k - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13}$$

En appliquant, de nouveau, la compatibilité de la congruence avec les puissances :
on a pour tout entier naturel k :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1^k \pmod{13}$$

soit :

$$\left(25^2\right)^k \equiv 1 \pmod{13}$$

On en déduit que :

$$\left(25^2\right)^k - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{13}$$

soit :

$$5^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Comme ; pour tout entier naturel k, on a :

$$5^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Comme ; pour tout entier naturel k, on a :

$$5^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Rappel :

$a \equiv 0 \ (n) \quad \Leftrightarrow \quad a$ est un multiple de n ou n est un diviseur de a

Comme ; pour tout entier naturel k, on a :

$$5^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

Rappel :

$a \equiv 0\ (n) \quad \Leftrightarrow \quad a$ est un multiple de n ou n est un diviseur de a

$5^{4k} - 1$ divisible par 13 pour tout entier naturel k.