Exercice 26 page 17

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Trouver les restes de la division euclidienne par 7 des nombres :

$$351^{12} \times 85^{15} \text{ et } 16^{12} - 23^{12}.$$

On a $351 = 7 \times 50 + 1$

correction

On a $351 = 7 \times 50 + 1$ donc

$$351 \equiv 1 \pmod{7}$$

On a $351 = 7 \times 50 + 1$ donc

$$351 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

On a $351 = 7 \times 50 + 1$ donc

$$351 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod n$$

alors pour tout entier naturel k, $a^k \equiv b^k \pmod n$,

On a $351 = 7 \times 50 + 1$ donc

$$351 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :
$$a \equiv b \pmod n$$
alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod n$,

on a :

$$351^{12} \equiv 1^{12} \pmod 7$$

On a $351 = 7 \times 50 + 1$ donc

$$351 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :
$$a \equiv b \pmod n$$
alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod n$,

on a :

$$351^{12} \equiv 1^{12} \pmod 7$$

soit :

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

On a $85 = 7 \times 12 + 1$

On a $85 = 7 \times 12 + 1$ donc

$$85 \equiv 1 \pmod 7$$

On a $85 = 7 \times 12 + 1$ donc

$$85 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances on a :

correction

On a $85 = 7 \times 12 + 1$ donc

$$85 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances on a :

$$85^{15} \equiv 1^{15} \pmod 7$$

On a $85 = 7 \times 12 + 1$ donc

$$85 \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances on a :

$$85^{15} \equiv 1^{15} \pmod 7$$

soit :

$$85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

correction

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

correction

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$

alors $ac \equiv bd \pmod n$,

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$
alors $ac \equiv bd \pmod n$,

on a :

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \times 1 \pmod 7$$

On a

$$351^{12} \equiv 1 \pmod{7}$$

et

$$85^{15} \equiv 1 \pmod{7}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$
alors $ac \equiv bd \pmod{n}$,

on a :

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \times 1 \pmod{7}$$

soit :

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \pmod{7}$$

Comme

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

Comme

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 1 < 7,$$

Comme

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 1 < 7,$$

Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 7

Comme

$$351^{12} \times 85^{15} \equiv 1 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 1 < 7,$$

Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 7

le reste de la division euclidienne de $351^{12} \times 85^{15}$ par 7 est 1

correction

On a $16 = 7 \times 2 + 2$

correction

On a $16 = 7 \times 2 + 2$ donc

$$16 \equiv 2 \pmod 7$$

On a $16 = 7 \times 2 + 2$ donc

$$16 \equiv 2 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

On a $16 = 7 \times 2 + 2$ donc

$$16 \equiv 2 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

correction

On a $23 = 7 \times 3 + 2$

correction

On a $23 = 7 \times 3 + 2$ donc

$$23 \equiv 2 \pmod 7$$

On a $23 = 7 \times 3 + 2$ donc

$$23 \equiv 2 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

correction

On a $23 = 7 \times 3 + 2$ donc

$$23 \equiv 2 \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

correction

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

correction

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

et

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

et

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec la somme/différence :

correction

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

et

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec la somme/différence :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$

alors $a - c \equiv b - d \pmod n$,

correction

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

et

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec la somme/différence :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$
alors $a - c \equiv b - d \pmod n$,

on a :

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 2^{12} - 2^{12} \pmod 7$$

On a

$$16^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

et

$$23^{12} \equiv 2^{12} \pmod 7$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec la somme/différence :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$
alors $a - c \equiv b - d \pmod n$,

on a :

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 2^{12} - 2^{12} \pmod 7$$

soit :

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 0 \pmod 7$$

Comme

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 0 \pmod 7$$

Comme

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 0 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 0 < 7,$$

Comme

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 0 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 0 < 7,$$

Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 7

Comme

$$16^{12} - 23^{12} \equiv 0 \pmod 7$$

et

$$0 \leq 0 < 7,$$

Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 7

le reste de la division euclidienne de $16^{12} - 23^{12}$ par 7 est 0