Activités mentales ex 11 page 16

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Montrer que $2^5 \equiv -1 \ (11)$.
Quels sont alors les restes de la division par 11 de 13^{12} et $(-2)^{19}$?

correction

On a :

$$2^5 = 32$$

correction

On a :

$$2^5 = 32 = 3 \times 11 - 1$$

correction

On a :

$$2^5 = 32 = 3 \times 11 - 1$$

donc

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

correction

On a :

$$13 \equiv 2 \pmod{11}$$

On a :

$$13 \equiv 2 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

On a :

$$13 \equiv 2 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

On a :

$$13 \equiv 2 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a et b des entiers relatifs vérifiant :
$$a \equiv b \pmod{n}$$
alors pour tout entier naturel k, $\quad a^k \equiv b^k \pmod{n}$,

on a :

$$13^{12} \equiv 2^{12} \pmod{11}$$

correction

or $12 = 5 \times 2 + 2$ donc

correction

or $12 = 5 \times 2 + 2$ donc

$$2^{12} = 2^{5\times 2+2} = \left(2^5\right)^2 \times 2^2$$

or $12 = 5 \times 2 + 2$ donc

$$2^{12} = 2^{5\times 2+2} = \left(2^5\right)^2 \times 2^2$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

correction

or $12 = 5 \times 2 + 2$ donc

$$2^{12} = 2^{5\times2+2} = \left(2^5\right)^2 \times 2^2$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\left(2^5\right)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11}$$

or $12 = 5 \times 2 + 2$ donc

$$2^{12} = 2^{5\times2+2} = \left(2^5\right)^2 \times 2^2$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\left(2^5\right)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11}$$

soit

$$\left(2^5\right)^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

correction

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

$$\text{alors} \quad ac \equiv bd \pmod{n},$$

correction

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

$$\text{alors} \quad ac \equiv bd \pmod{n},$$

on a :

$$\left(2^5\right)^2 \times 2^2 \equiv (-1)^2 \times 2^2 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :
$a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$
alors $ac \equiv bd \pmod{n}$,

on a :

$$\left(2^5\right)^2 \times 2^2 \equiv (-1)^2 \times 2^2 \pmod{11}$$

soit

$$2^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

$$\text{alors} \quad ac \equiv bd \pmod{n},$$

on a :

$$\left(2^5\right)^2 \times 2^2 \equiv (-1)^2 \times 2^2 \pmod{11}$$

soit

$$2^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

or

$$13^{12} \equiv 2^{12} \pmod{11}$$

correction

En appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit :

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$ et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

$$\text{alors} \quad ac \equiv bd \pmod{n},$$

on a :

$$\left(2^5\right)^2 \times 2^2 \equiv (-1)^2 \times 2^2 \pmod{11}$$

soit

$$2^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

or

$$13^{12} \equiv 2^{12} \pmod{11}$$

donc, par transitivité :

$$13^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

On a :

$$13^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

On a :

$$13^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

comme $0 \leq 4 < 11$,

On a :

$$13^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

comme $0 \leq 4 < 11,$

Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 11

On a :

$$13^{12} \equiv 4 \pmod{11}$$

comme $0 \leq 4 < 11$,
Remarque : cette ligne sert à vérifier que le nombre trouvé est bien un reste dans la division euclidienne par 11

le reste de la division euclidienne par 11 de 13^{12} est 4.

correction

On a

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times3+4}$$

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times3+4} = -\left(2^5\right)^3 \times 2^4$$

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times 3+4} = -\left(2^5\right)^3 \times 2^4$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times 3+4} = -\left(2^5\right)^3 \times 2^4$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\left(2^5\right)^3 \equiv (-1)^3 \pmod{11}$$

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times 3+4} = -\left(2^5\right)^3 \times 2^4$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\left(2^5\right)^3 \equiv (-1)^3 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit, on a :

$$-\left(2^5\right)^3 \times 2^4 \equiv -(-1)^3 \times 2^4 \pmod{11}$$

correction

On a $(-2)^{19} = -2^{19}$ et $19 = 5 \times 3 + 4$ donc :

$$(-2)^{19} = -2^{5\times 3+4} = -\left(2^5\right)^3 \times 2^4$$

comme, de plus,

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec les puissances, on a :

$$\left(2^5\right)^3 \equiv (-1)^3 \pmod{11}$$

en appliquant la compatibilité de la congruence avec le produit, on a :

$$-\left(2^5\right)^3 \times 2^4 \equiv -(-1)^3 \times 2^4 \pmod{11}$$

soit :

$$-\left(2^5\right)^3 \times 2^4 \equiv 16 \pmod{11}$$

Ainsi,

$$(-2)^{19} \equiv 16 \pmod{11}$$

Ainsi,

$$(-2)^{19} \equiv 16 \pmod{11}$$

Or, 16 > 11 donc 16 ne peut pas être un reste de la division euclidienne par 11, mais :

Ainsi,

$$(-2)^{19} \equiv 16 \pmod{11}$$

Or, 16 > 11 donc 16 ne peut pas être un reste de la division euclidienne par 11, mais :

$$(-2)^{19} \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$$

Ainsi,

$$(-2)^{19} \equiv 16 \pmod{11}$$

Or, 16 > 11 donc 16 ne peut pas être un reste de la division euclidienne par 11, mais :

$$(-2)^{19} \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$$

comme $0 \leq 5 < 11$,

Ainsi,

$$(-2)^{19} \equiv 16 \pmod{11}$$

Or, 16 > 11 donc 16 ne peut pas être un reste de la division euclidienne par 11, mais :

$$(-2)^{19} \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$$

comme $0 \leq 5 < 11$, le reste de la division euclidienne par 11 de $(-2)^{19}$ est 5.