Auto-évaluation ex 9 page 7

Sésamath

Maths TS spécialité

Un nombre n est le produit de deux entiers a et b.

1. n est pair. Quelle peut être la parité de a et de b ?
2. n est impair. Quelle peut être la parité de a et de b ?
3. Énoncer une règle sur la parité du produit de deux entiers.

correction

Cet exercice peut-être résolu de deux manières différentes :

- en utilisant les congruences : c'est la méthode la plus simple
- sans utiliser les congruences : cette méthode est un peu plus difficile mais sa démonstration est intéressante

Méthode utilisant les congruences

1. Rappel :

correction

1. Rappel :
   - Un entier n est pair si, et seulement si,

$$n \equiv 0 \pmod 2$$

1. Rappel :

   - Un entier n est pair si, et seulement si,

   $$n \equiv 0 \pmod 2$$

   - Un entier n est impair si, et seulement si,

   $$n \equiv 1 \pmod 2$$

correction

- Soient a et b deux entiers.

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur produit ab modulo 2

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$,
alors, par compatibilité avec le produit,
$ab \equiv 1 \times 1 \equiv 1 \pmod 2$.

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur produit ab modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod{2}$ et $b \equiv 1 \pmod{2}$,
alors, par compatibilité avec le produit,
$ab \equiv 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{2}$.

correction

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur produit ab modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

		$a \equiv ... \pmod{2}$	
		0	1
$b \equiv ... \pmod{2}$	0	0	0
	1	0	1

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod{2}$ et $b \equiv 1 \pmod{2}$, alors, par compatibilité avec le produit, $ab \equiv 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{2}$.

correction

Si $n = ab$ est pair, d'après le tableau, a ou b est pair.

Si $n = ab$ est pair, d'après le tableau, a ou b est pair.

Remarque : Un tableau de congruence donnant de manière exhaustive tous les résultats possibles,

pour que ab soit pair ($ab \equiv 0 \pmod 2$), il faut que

$a \equiv 0 \pmod 2$ et $b \equiv 0 \pmod 2$
ou $a \equiv 0 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$
ou $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 0 \pmod 2$

autrement dit : si ab est pair alors a ou b est pair.

2 D’après le tableau précédent :

2 D'après le tableau précédent :

si $n = ab$ est impair alors a et b sont impairs.

Remarque : Un tableau de congruence donnant de manière exhaustive tous les résultats possibles,

pour que ab soit impair ($ab \equiv 1 \pmod 2$), il faut que

$a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$

autrement dit : si ab est impair alors a et b sont impairs.

3 D'après les questions précédentes :

3 D'après les questions précédentes :

Le produit de deux entiers est pair si l'un au moins est pair ,
et impair s'ils sont tous deux impairs.

Méthode n’utilisant pas les congruences

correction

1. Rappel :

1. Rappel :

   - Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier

1. Rappel :

- Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier
- Un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $2k+1$ avec k entier

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :

correction

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :
  - On a : $a = 2k$ avec k entier

correction

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :
  - On a : $a = 2k$ avec k entier
  - alors $ab = (2k)b$

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :
  - On a : $a = 2k$ avec k entier
  - alors $ab = (2k)b = 2(kb)$

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :
  - On a : $a = 2k$ avec k entier
  - alors $ab = (2k)b = 2(kb)$ avec kb entier

correction

- Si a ou b sont pairs (supposons a pair) :
  - On a : $a = 2k$ avec k entier
  - alors $ab = (2k)b = 2(kb)$ avec kb entier
  - Ainsi, $n = ab$ est pair

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $ab = (2k + 1)(2k' + 1)$

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 2(2kk' + k + k') + 1$

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 2(2kk' + k + k') + 1$ avec $2kk' + k + k'$ entier

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 2(2kk' + k + k') + 1$ avec $2kk' + k + k'$ entier
  - Ainsi, $n = ab$ est impair

- Conclusion : si n est pair alors a ou b est pair.

correction

- Conclusion : si n est pair alors a ou b est pair.

Remarque : On a effectué un raisonnement par disjonction des cas : on a listé tous les cas possibles pour a et b.

2. D’après le raisonnement précédent :

2. D'après le raisonnement précédent :

si n est impair alors a et b sont impairs.

3 D'après les questions précédentes :

3 D'après les questions précédentes :

Le produit de deux entiers est pair si l'un au moins est pair ,
et impair s'ils sont tous deux impairs.