Auto-évaluation ex 8 page 7

Sésamath

Maths TS spécialité

énoncé

Un nombre n est la somme de deux entiers a et b.

1. n est pair. Quelle peut être la parité de a et de b ?
2. n est impair. Quelle peut être la parité de a et de b ?
3. Énoncer une règle sur la parité de la somme de deux entiers.

correction

Cet exercice peut-être résolu de deux manières différentes :

- en utilisant les congruences : c'est la méthode la plus simple
- sans utiliser les congruences : cette méthode est un peu plus difficile mais sa démonstration est intéressante

Méthode utilisant les congruences

correction

1. Rappel :

correction

1. Rappel :

   - Un entier n est pair si, et seulement si,

$$n \equiv 0 \pmod 2$$

1. Rappel :

- Un entier n est pair si, et seulement si,

$$n \equiv 0 \pmod 2$$

- Un entier n est impair si, et seulement si,

$$n \equiv 1 \pmod 2$$

correction

- Soient a et b deux entiers.

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur somme $a+b$ modulo 2

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$,
alors, par compatibilité avec la somme,
$a+b \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur somme $a + b$ modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$,
alors, par compatibilité avec la somme,
$a + b \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

correction

- Soient a et b deux entiers.
  - Dressons le tableau de congruences de leur somme $a+b$ modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

		$a \equiv ... \pmod 2$	
		0	1
$b \equiv ... \pmod 2$	0	0	1
	1	1	0

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$,
alors, par compatibilité avec la somme,
$a + b \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

Si $n = a + b$ est pair, d'après le tableau, a et b ont la même parité.

Si $n = a + b$ est pair, d'après le tableau, a et b ont la même parité.

Remarque : Un tableau de congruence donnant de manière exhaustive tous les résultats possibles,

pour que $a + b$ soit pair ($a + b \equiv 0 \pmod 2$), il faut que

$a \equiv 0 \pmod 2$ et $b \equiv 0 \pmod 2$
ou $a \equiv 1 \pmod 2$ et $b \equiv 1 \pmod 2$

autrement dit : si $a + b$ est pair alors a et b ont la même parité.

2. D’après le tableau précédent :

2. D'après le tableau précédent :

   si $n = a + b$ est impair alors a et b ont des parités contraires.

correction

3 D’après les questions précédentes :

3 D'après les questions précédentes :

La somme de deux entiers de même parité est paire ;
la somme de deux entiers de parités contraires est impaire.

Méthode n'utilisant pas les congruences

correction

1 Rappel :

correction

1. Rappel :
   - Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier

correction

1. Rappel :
   - Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier
   - Un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $2k+1$ avec k entier

- Si a et b sont pairs tous les deux :

correction

- Si a et b sont pairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers

- Si a et b sont pairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k'$

- Si a et b sont pairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$

- Si a et b sont pairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$ avec $k + k'$ entier

- Si a et b sont pairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$ avec $k + k'$ entier
  - Ainsi, $n = a + b$ est pair

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :

correction

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1$

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1)$

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1)$ avec $k + k' + 1$ entier

- Si a et b sont impairs tous les deux :
  - On a : $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1)$ avec $k + k' + 1$ entier
  - Ainsi, $n = a + b$ est pair

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' + 1$

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1$

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1$ avec $k + k'$ entier

correction

- Si a et b n'ont pas la même parité (supposons a pair et b impair) :
  - On a : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ avec k et k' entiers
  - alors $a + b = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1$ avec $k + k'$ entier
  - Ainsi, $n = a + b$ est impair

- Conclusion : si n est pair alors a et b ont la même parité.

- Conclusion : si n est pair alors a et b ont la même parité.

Remarque : On a effectué un raisonnement par disjonction des cas : on a listé tous les cas possibles pour a et b.

2. D'après le raisonnement précédent :

2 D'après le raisonnement précédent :

si n est impair alors a et b ont des parités contraires.

correction

3 D’après les questions précédentes :

3. D'après les questions précédentes :

La somme de deux entiers de même parité est paire ;
la somme de deux entiers de parités contraires est impaire.