

Auto-évaluation ex 10 page 7

Sésamath

Maths TS spécialité



Un nombre n est le carré d'un entier a .

- 1 n est pair. Quelle peut être la parité de a ?
- 2 n est impair. Quelle peut être la parité de a ?
- 3 Énoncer une règle sur la parité d'un entier et de son carré.

Cet exercice peut-être résolu de deux manières différentes :

- en utilisant les congruences : c'est la méthode la plus simple
- sans utiliser les congruences : cette méthode est un peu plus difficile mais sa démonstration est intéressante

Méthode utilisant les congruences

1 Rappel :

1 Rappel :

- Un entier n est pair si, et seulement si,

$$n \equiv 0 \pmod{2}$$

1 Rappel :

- Un entier n est pair si, et seulement si,

$$n \equiv 0 \pmod{2}$$

- Un entier n est impair si, et seulement si,

$$n \equiv 1 \pmod{2}$$

- Soit a un entier.

- Soit a un entier.
 - Dressons le tableau de congruences de son carré a^2 modulo 2

■ Soit a un entier.

- Dressons le tableau de congruences de son carré a^2 modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

■ Soit a un entier.

- Dressons le tableau de congruences de son carré a^2 modulo 2

Rappel : Un tableau de congruence est un tableau permettant de présenter des résultats de manière exhaustive en se référant aux restes possibles dans une division euclidienne.

$a \equiv \dots \pmod{2}$	0	1
$a^2 \equiv \dots \pmod{2}$	0	1

Explication : par exemple si $a \equiv 1 \pmod{2}$,
alors, par compatibilité avec les puissances,
 $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{2}$.

Si $n = a^2$ est pair, d'après le tableau, a est pair.

Si $n = a^2$ est pair, d'après le tableau, a est pair.

Remarque : Un tableau de congruence donnant de manière exhaustive tous les résultats possibles,

pour que a^2 soit pair ($a^2 \equiv 0 \pmod{2}$), il faut que $a \equiv 0 \pmod{2}$
autrement dit : si a^2 est pair alors a est pair.

2 D'après le tableau précédent :

2 D'après le tableau précédent :

Si $n = a^2$ est impair, a est impair.

2 D'après le tableau précédent :

Si $n = a^2$ est impair, a est impair.

Explication :

pour que a^2 soit impair ($a^2 \equiv 1 \pmod{2}$), il faut que $a \equiv 1 \pmod{2}$

autrement dit : si a^2 est impair alors a est impair.

3 D'après les questions précédentes :

3 D'après les questions précédentes :

Un entier et son carré ont même parité.

Méthode n'utilisant pas les congruences

1 Rappel :

1 Rappel :

- Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier

1 Rappel :

- Un entier est pair s'il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier
- Un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec k entier

- Si a est pair :

■ Si a est pair :

- On a : $a = 2k$ avec k entier

■ Si a est pair :

- On a : $a = 2k$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k)^2$

■ Si a est pair :

- On a : $a = 2k$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$

■ Si a est pair :

- On a : $a = 2k$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ avec $2k^2$ entier

■ Si a est pair :

- On a : $a = 2k$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ avec $2k^2$ entier
- Ainsi, $n = a^2$ est pair

- Si a est impair :

■ Si a est impair :

- On a : $a = 2k + 1$ avec k entier

■ Si a est impair :

- On a : $a = 2k + 1$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k + 1)^2$

■ Si a est impair :

- On a : $a = 2k + 1$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

■ Si a est impair :

- On a : $a = 2k + 1$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k$ entier

■ Si a est impair :

- On a : $a = 2k + 1$ avec k entier
- alors $a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k$ entier
- Ainsi, $n = a^2$ est impair

- Conclusion : si n est pair alors a est pair.

- Conclusion : si n est pair alors a est pair.

Remarque : On a effectué un raisonnement par disjonction des cas : on a listé tous les cas possibles pour a .

2 D'après le raisonnement précédent :

2 D'après le raisonnement précédent :

si n est impair alors a est impair.

3 D'après les questions précédentes :

3 D'après les questions précédentes :

Un entier et son carré ont même parité.