Activités mentales ex 6 page 393

Sésamath

Maths TS obligatoire

On lance n fois une pièce équilibrée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de « face » obtenus au seuil de $95\,\%$ pour $n = 100$.
2. Même question pour $n = 10\,000$.
3. Combien de lancers devrait-on effectuer pour avoir l'intervalle de fluctuation asymptotique d'amplitude $1{,}96 \times 10^{-3}$?

Rappel

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ est l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

correction

1

$$p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=0,5-1,96\times\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}$$
$$=0{,}402$$

correction

1

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}}$$
$$= 0{,}402$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}}$$
$$= 0{,}598$$

correction

1

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}}$$
$$= 0{,}402$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}}$$
$$= 0{,}598$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ si $n = 100$ est :

$$[0{,}402\ ;\ 0{,}598]$$

2

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{10\,000}}$$
$$= 0{,}490\,2$$

2

$$p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5-1,96\times\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{10\,000}}$$
$$= 0{,}490\,2$$

$$p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1+1,96\times\frac{\sqrt{0,1\times 0,9}}{\sqrt{100}}$$
$$= 0{,}509\,8$$

2

$$p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=0,5-1,96\times\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{10\,000}}$$
$$=0{,}490\,2$$

$$p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=0,1+1,96\times\frac{\sqrt{0,1\times0,9}}{\sqrt{100}}$$
$$=0{,}509\,8$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ si $n=10\,000$ est :

$$[0{,}490\,2\;;\;0{,}509\,8]$$

3. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

correction

3. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit de résoudre

$$2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3}$$

3 L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit de résoudre

$$2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{n}} = 10^{-3}$$

3. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit de résoudre

$$2 \times 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{n}} = 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{10^{-3}}$$

3 L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit de résoudre

$$2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3} \Leftrightarrow 2 \times \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{n}} = 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow n = 10^6$$

3. L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique est

$$2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit de résoudre

$$\begin{aligned} 2 \times 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times 10^{-3} &\Leftrightarrow 2 \times \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{n}} = 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{10^{-3}} \\ &\Leftrightarrow n = 10^6 \end{aligned}$$

Il faut donc faire un million de lancers.