Activités mentales ex 3 page 393

Sésamath

Maths TS obligatoire

Mélanie s'intéresse au nombre de spams reçus dans ses emails. Une de ses connaissances affirme que les spams représentent $10\,\%$ des mails échangés, ce dont doute Mélanie.
Elle décide d'étudier un échantillon de 100 mails pour tester cette hypothèse : sous celle-ci, on note X le nombre de spams dans un échantillon de 100 mails.

1. Préciser la loi suivie par X.
2. Calculer de tête $\dfrac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{100}}$.
3. En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$.
4. Mélanie a compté 6 spams parmi 100 mails reçus. Que penser de l'hypothèse de départ ?

correction

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli. Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli. Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Rappel : Schéma de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli.
Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Rappel : Schéma de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Rappel : loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

correction

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)

correction

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

- soit l'épreuve est un succès lorsque l'email est un spam de probabilité $p = 0,1$

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

- soit l'épreuve est un succès lorsque l'email est un spam de probabilité $p = 0,1$
- soit l'épreuve est un échec lorsque l'email n'est pas un spam de probabilité $1 - p = 0,9$

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

- soit l'épreuve est un succès lorsque l'email est un spam de probabilité $p = 0,1$
- soit l'épreuve est un échec lorsque l'email n'est pas un spam de probabilité $1 - p = 0,9$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 100$ et $p = 0,1$

correction

1 *L'expérience* est constituée de $n = 100$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque les tirages sont assimilables à des tirages avec remise (car le nombre de emails est très grand)
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

- soit l'épreuve est un succès lorsque l'email est un spam de probabilité $p = 0,1$
- soit l'épreuve est un échec lorsque l'email n'est pas un spam de probabilité $1 - p = 0,9$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 100$ et $p = 0,1$
Ainsi, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,1$

2

$$\frac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{100}} = 0,03$$

3

Rappel

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ est l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

En pratique, cet intervalle permet des **prises de décisions** au seuil de $95\,\%$ sous les conditions suivantes :

$$n \geqslant 30,\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5.$$

correction

3. On a :

$$n = 100 \geq 30$$

correction

3. On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

correction

3. On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

$$n(1-p) = 90 \geq 5$$

3. On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

$$n(1-p) = 90 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

3 On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

$$n(1-p) = 90 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}} = 0{,}041\,2$$

3 On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

$$n(1-p) = 90 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}} = 0{,}041\,2$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}} = 0{,}128\,8$$

3 On a :

$$n = 100 \geq 30$$

$$np = 10 \geq 5$$

$$n(1-p) = 90 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}} = 0{,}041\,2$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{100}} = 0{,}128\,8$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ si $n = 100$ et $p = 0{,}1$ est :

$$[0{,}041\,2\ ;\ 0{,}128\,8]$$

4

Rappel

On considère une population dans laquelle on souhaite savoir si la proportion d'individus vérifiant une certaine propriété est p : c'est l'hypothèse à tester.
Pour cela, on détermine d'abord sous cette hypothèse un intervalle de fluctuation asymptotique I (à un certain seuil) de la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n prélevé dans la population (en admettant que ce prélèvement est assimilable à des tirages avec remise). Puis on observe effectivement cette fréquence f dans un échantillon donné et :

- si $f \notin I$ alors on rejette l'hypothèse que la proportion est p au seuil considéré ;
- si $f \in I$ alors on ne rejette pas l'hypothèse que la proportion est p au seuil considéré.

correction

4 La fréquence d’apparition des spams dans l’échantillon de 100 emails est :

$$f = \frac{6}{100} = 0,06$$

4 La fréquence d'apparition des spams dans l'échantillon de 100 emails est :

$$f = \frac{6}{100} = 0,06$$

Or,

$$0,06 \in [0{,}041\,2 \;;\; 0{,}128\,8]$$

4 La fréquence d'apparition des spams dans l'échantillon de 100 emails est :

$$f = \frac{6}{100} = 0,06$$

Or,

$$0,06 \in [0{,}041\,2\ ;\ 0{,}128\,8]$$

donc

on ne peut pas rejeter l'hypothèse de départ.