Exercice 17 page 394

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Un producteur de jus de pomme a constaté que $4\,\%$ de sa production n'avait pas pu être commercialisée l'an dernier à cause d'une teneur en sucre trop élevée.
Il décide de tester un échantillon de sa nouvelle production pour savoir si la proportion de bouteilles non commercialisables est différente de celle de l'année dernière.
Il choisit au hasard dans sa production 598 bouteilles, et compte le nombre X de bouteilles non commercialisables (on suppose que le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise).

1. Quelle loi suit X sous l'hypothèse où la proportion de bouteilles non commercialisables n'aurait pas évolué d'une année sur l'autre ?
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de bouteilles non commercialisables au seuil de $95\,\%$ dans cet échantillon.
3. Le producteur trouve finalement 19 bouteilles non commercialisables. Peut-il affirmer qu'il a fait mieux que l'an dernier ?

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli. Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli.
Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Rappel : Schéma de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

1

Rappel : loi de Bernouilli

On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une épreuve de Bernoulli.
Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée succès (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Rappel : Schéma de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Rappel : loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

1 *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise

correction

1 *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

correction

1. *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
   - soit l'épreuve est un succès lorsque la bouteille est non commercialisable de probabilité $p = 0,04$

1. *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
   - soit l'épreuve est un succès lorsque la bouteille est non commercialisable de probabilité $p = 0,04$
   - soit l'épreuve est un échec lorsque la bouteille est commercialisable de probabilité $1 - p = 0,96$

correction

1. *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
   - soit l'épreuve est un succès lorsque la bouteille est non commercialisable de probabilité $p = 0,04$
   - soit l'épreuve est un échec lorsque la bouteille est commercialisable de probabilité $1 - p = 0,96$

   Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 598$ et $p = 0,04$

correction

1 *L'expérience* est constituée de $n = 598$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisque le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

- soit l'épreuve est un succès lorsque la bouteille est non commercialisable de probabilité $p = 0,04$
- soit l'épreuve est un échec lorsque la bouteille est commercialisable de probabilité $1 - p = 0,96$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 598$ et $p = 0,04$
Ainsi, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 598$ et $p = 0,04$

Rappel

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ est l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

En pratique, cet intervalle permet des **prises de décisions** au seuil de $95\,\%$ sous les conditions suivantes :

$$n \geqslant 30,\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5.$$

correction

2. On a :

$$n = 598 \geq 30$$

2. On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

2. On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

$$n(1-p) = 574,08 \geq 5$$

correction

2. On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

$$n(1-p) = 574,08 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

2 On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

$$n(1-p) = 574,08 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,04 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,04 \times 0,96}}{\sqrt{598}} \approx 0{,}024$$

2. On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

$$n(1-p) = 574,08 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,04 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,04 \times 0,96}}{\sqrt{598}} \approx 0{,}024$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,04 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,04 \times 0,96}}{\sqrt{598}} \approx 0{,}056$$

2 On a :

$$n = 598 \geq 30$$

$$np = 23,92 \geq 5$$

$$n(1-p) = 574,08 \geq 5$$

Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation sont donc réunies.

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,04 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,04 \times 0,96}}{\sqrt{598}} \approx 0{,}024$$

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,04 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,04 \times 0,96}}{\sqrt{598}} \approx 0{,}056$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ est à 10^{-3} près :

$$I_F = [0{,}024\ ;\ 0{,}056]$$

3. On a

$$f = \frac{19}{598} \approx 0{,}032$$

3. On a

$$f = \frac{19}{598} \approx 0{,}032 \in I_F$$

3. On a

$$f = \frac{19}{598} \approx 0{,}032 \in I_F$$

f est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$. Le producteur n'a pas fait mieux que l'an dernier.