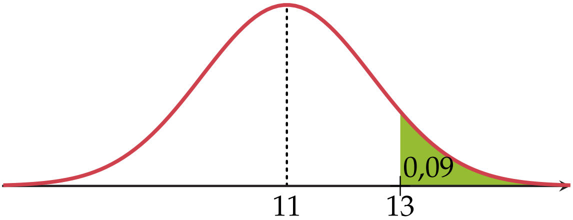
Activités mentales ex 9 page 368

Sésamath

Maths TS obligatoire

Dans les exercices 8 à 10, on a tracé les courbes représentatives des fonctions de densité de variables aléatoires X, Y et Z suivant des lois $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ ainsi que leur axe de symétrie respectif et écrit l'aire des domaines colorés.



Déterminer les probabilités suivantes.

1. $P(Y \leqslant 9)$
2. $P(11 < Y \leqslant 13)$
3. $P(Y \geqslant 9)$
4. $P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13)$

Rappel

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$.

correction

Rappel

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

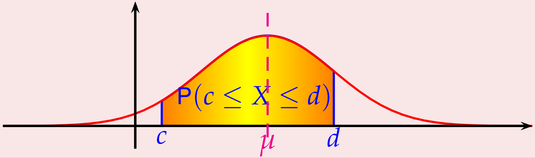
Rappel

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$.

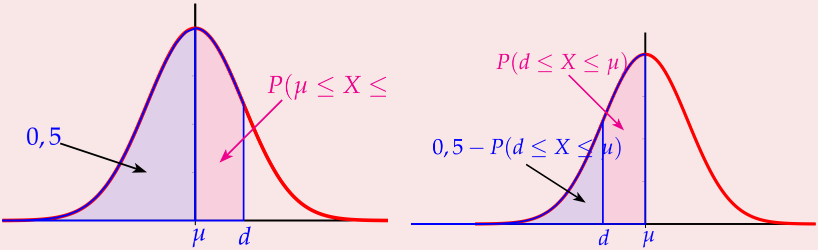
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Sa densité f est alors donnée par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

La courbe de f est appelée **gaussienne** et est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ ce qui permet d'en déduire des probabilités par symétrie autour de μ.

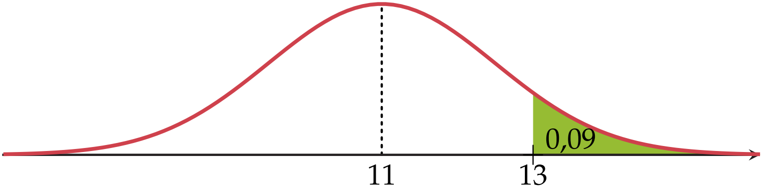


Rappel

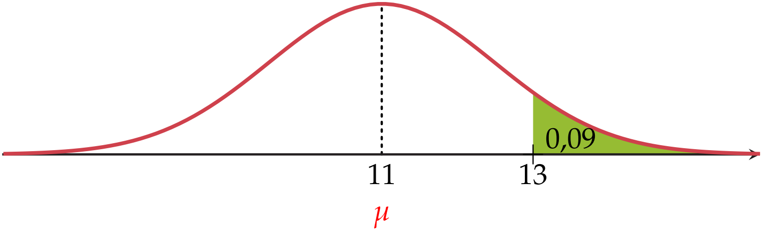


On a ici comme axe de symétrie $x = 11$ donc $\mu = 11$.

On a ici comme axe de symétrie $x = 11$ donc $\mu = 11$.

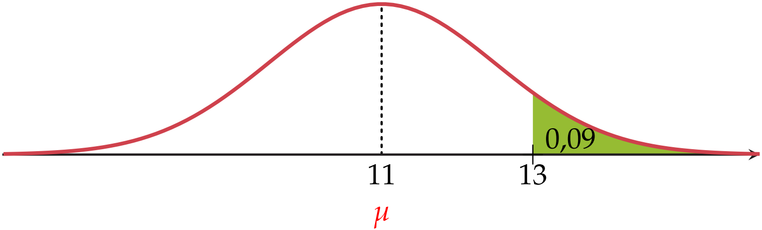


On a ici comme axe de symétrie $x = 11$ donc $\mu = 11$.

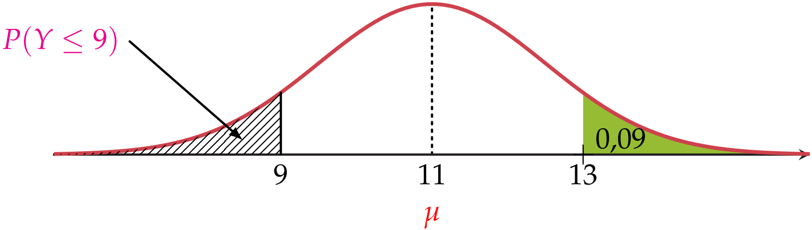


correction

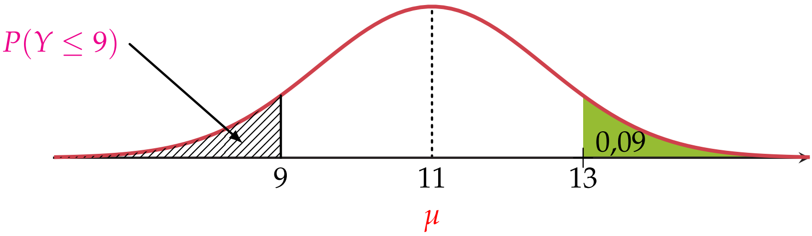
1



1



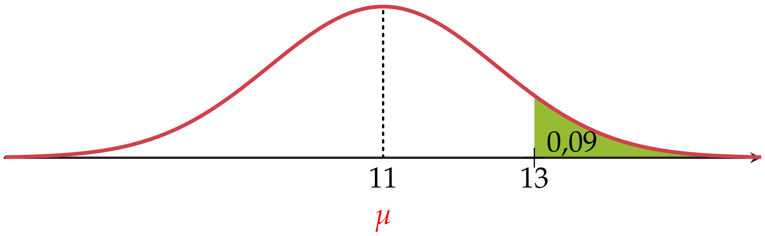
1



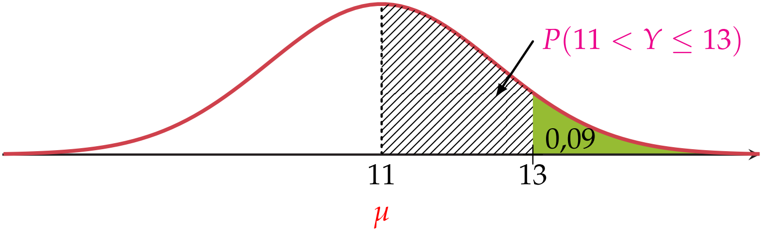
Par symétrie,

$$P(X \leq 9) = P(Y \geq 13) = 0,09$$

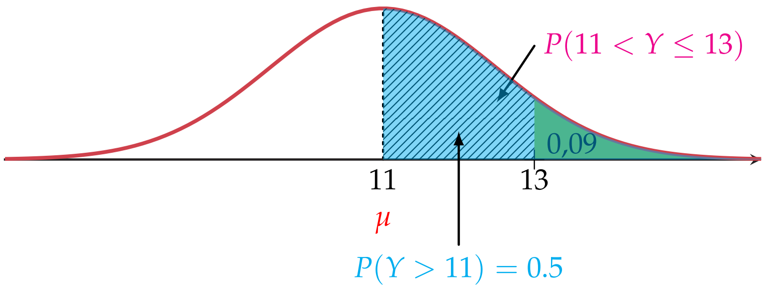
2



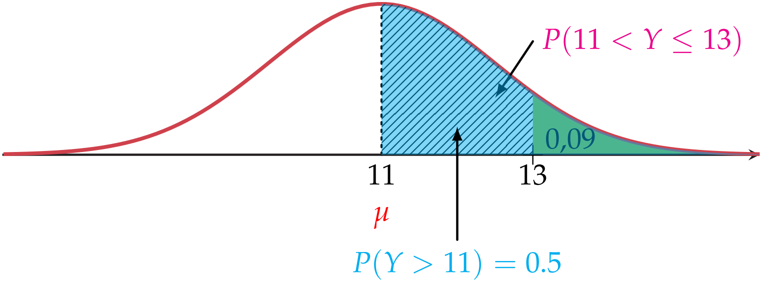
2



2

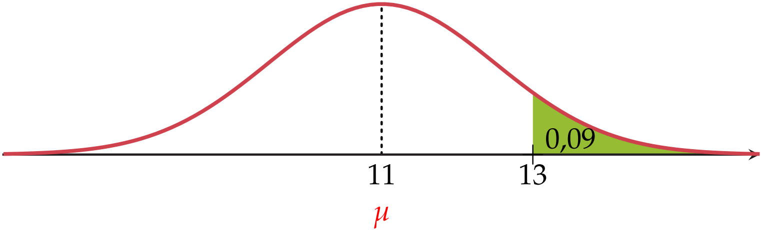


2

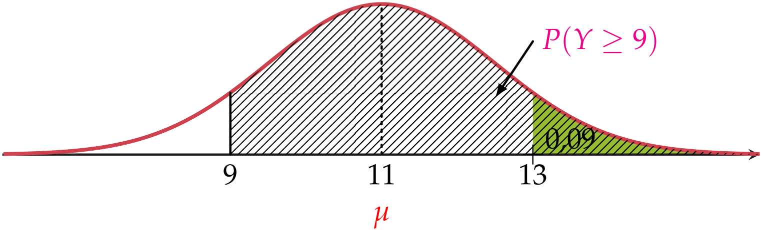


$$P(11 < Y \leq 13) = 0,5 - 0,09 = 0,41$$

3

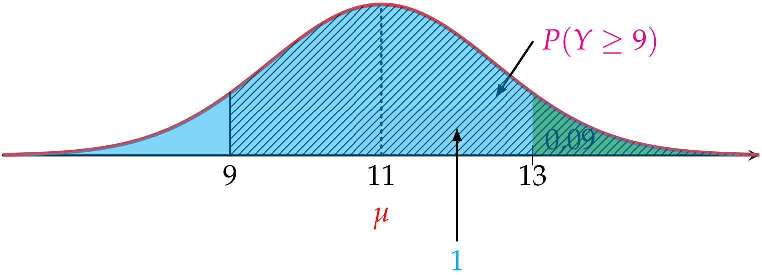


3

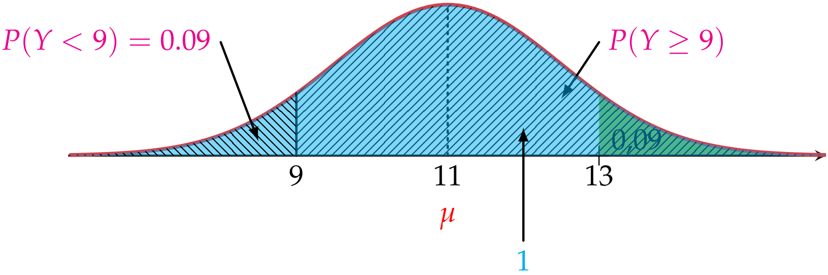


correction

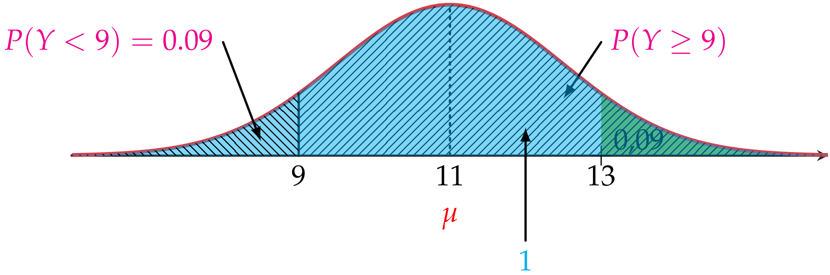
3



3



3



$$P(Y \geqslant 9) = 1 - 0.09 = 0,91$$

4

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

4

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ici, on a :

$$P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13) = \frac{P\left((Y > 9) \cap (Y \leqslant 13)\right)}{P(Y > 9)}$$

4

Rappel

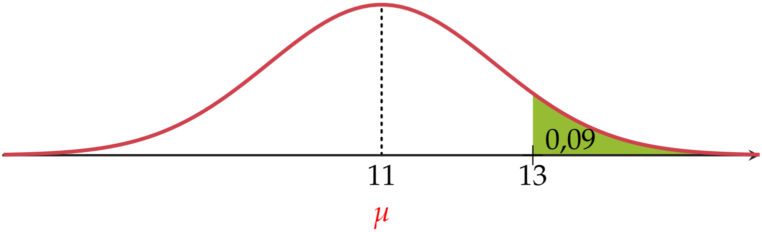
Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

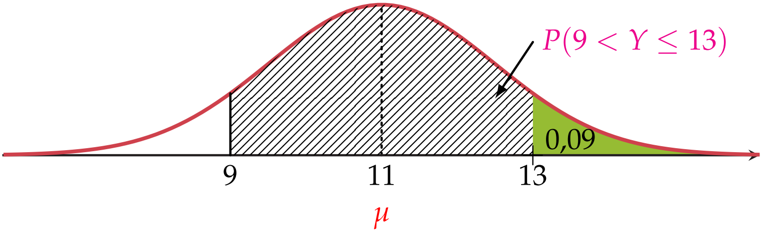
Ici, on a :

$$\begin{aligned} P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13) &= \frac{P\left((Y > 9) \cap (Y \leqslant 13)\right)}{P(Y > 9)} \\ &= \frac{P\left(9 < Y \leqslant 13\right)}{P(Y > 9)} \end{aligned}$$

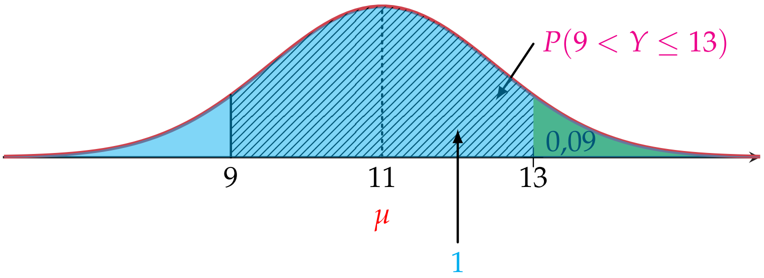
4



4

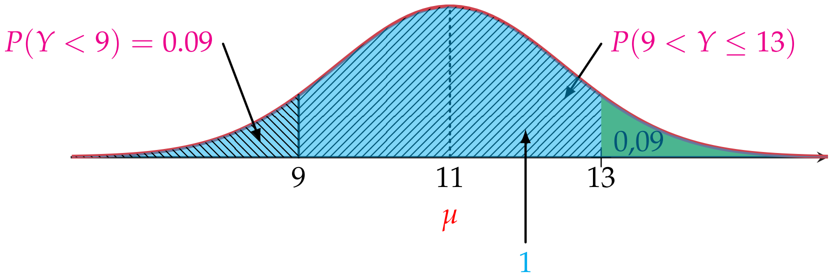


4

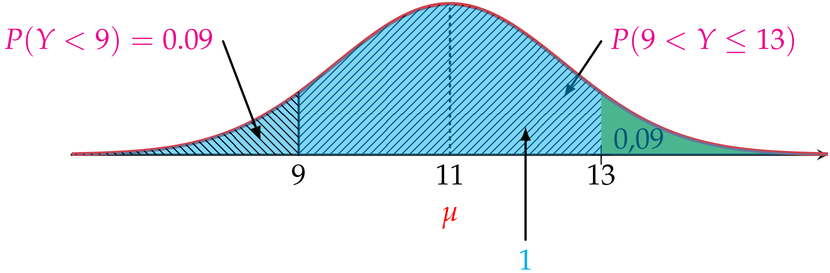


correction

4



4



Ainsi,

$$P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13) = \frac{1 - 2 \times 0,09}{0.91} = \frac{0.82}{0.91}$$