Exercice 32 page 371

Sésamath

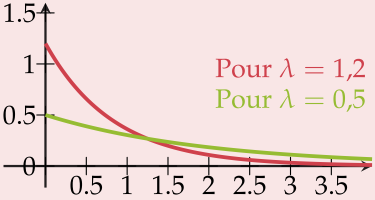
Maths TS obligatoire

Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $P(Y > 30) = 0{,}2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. On considère maintenant $\lambda = 0{,}05$. Calculer :
   a) $P(Y \geqslant 15)$
   b) $P(Y \geqslant 5)$
   c) $P_{(Y \geqslant 15)}(Y \geqslant 20)$
   d) $E(Y)$

Rappel

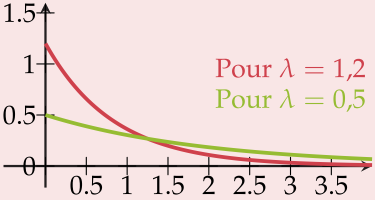
Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.



correction

Rappel

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.



Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et a, c et d trois réels positifs. On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$

1

$$P(Y > 30) = 0{,}2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30} = 0,2$$

correction

1

$$\begin{aligned} P(Y>30)=0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30}=0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda\times 30=\ln(0,2) \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda \times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda \approx 0,054 \end{aligned}$$

correction

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda \times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda \approx 0,054 \end{aligned}$$

2 a) $P(Y \geqslant 15) = \mathrm{e}^{-0{,}05 \times 15}$

correction

1

$$P(Y>30)=0{,}2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30}=0,2$$
$$\Leftrightarrow -\lambda\times 30=\ln(0,2)$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{-\ln(0,2)}{30}$$
$$\Leftrightarrow \lambda\approx 0,054$$

2 a) $P(Y\geqslant 15)=\mathrm{e}^{-0{,}05\times 15}=\mathrm{e}^{-0{,}75}$

correction

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda \times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda \approx 0,054 \end{aligned}$$

2 a) $P(Y \geqslant 15) = \mathrm{e}^{-0{,}05 \times 15} = \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 0{,}472$

correction

1

$$\begin{aligned} P(Y>30)=0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30}=0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda\times 30=\ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda=\frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda\approx 0,054 \end{aligned}$$

2 a) $P(Y\geqslant 15)=\mathrm{e}^{-0{,}05\times 15}=\mathrm{e}^{-0{,}75}\approx 0{,}472$

b) $P(Y\geqslant 5)=\mathrm{e}^{-0{,}05\times 5}$

correction

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda\times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda \approx 0,054 \end{aligned}$$

2 a) $P(Y \geqslant 15) = \mathrm{e}^{-0{,}05\times 15} = \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 0{,}472$

b) $P(Y \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-0{,}05\times 5} = \mathrm{e}^{-0{,}25}$

1

$$\begin{aligned} P(Y > 30) = 0{,}2 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda \times 30} = 0,2 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \times 30 = \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-\ln(0,2)}{30} \\ &\Leftrightarrow \lambda \approx 0,054 \end{aligned}$$

2 a) $P(Y \geqslant 15) = \mathrm{e}^{-0{,}05 \times 15} = \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 0{,}472$

b) $P(Y \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-0{,}05 \times 5} = \mathrm{e}^{-0{,}25} \approx 0{,}779$

2 c)

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.

La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t + h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.

On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

2 c)

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.

La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t + h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.

On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

$$P_{Y \geq 15}(Y \geq 20) = P_{Y \geq 15}(Y \geq 15 + 5)$$

2 c)

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.

La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X > t + h)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.

On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

$$\begin{aligned} P_{Y\geq 15}(Y \geq 20) &= P_{Y\geq 15}(Y \geq 15 + 5) \\ &= P(Y \geq 5) \end{aligned}$$

2 c)

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et deux nombres $t > 0$ et $h > 0$.

La probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}\left(X > t + h\right)$ est égale à la probabilité $P(X > h)$.

On dit que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

$$\begin{aligned} P_{Y\geq 15}(Y \geq 20) &= P_{Y\geq 15}(Y \geq 15 + 5) \\ &= P(Y \geq 5) \\ &\approx 0,779 \end{aligned}$$

2 d)

Rappel

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 d)

Rappel

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

2 d)

Rappel

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E(Y) = \frac{1}{0,05}$$

2 d)

Rappel

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E(Y) = \frac{1}{0,05} = 20$$