Activités mentales ex 12 page 368

Sésamath

Maths TS obligatoire

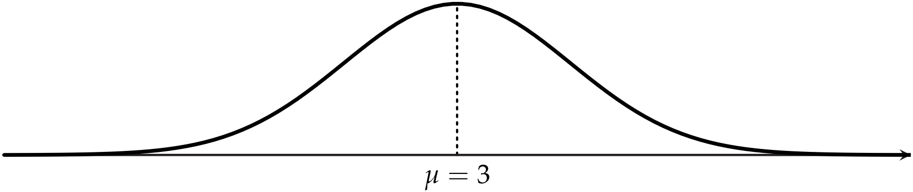
énoncé

On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(3\ ;\ \sigma^2)$ et telle que $P(X < 1) = 0{,}4$.

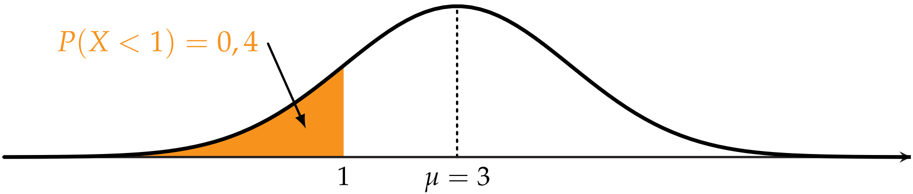
Déterminer les probabilités suivantes sans calculatrice.

1. $P(1 \leqslant X < 3)$
2. $P(X > 5)$
3. $P_{(X<5)}(X \geqslant 1)$

Commençons par un schéma :



Commençons par un schéma :



Rappel

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$.

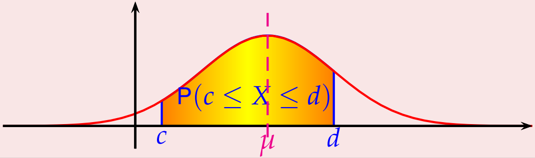
Rappel

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$.

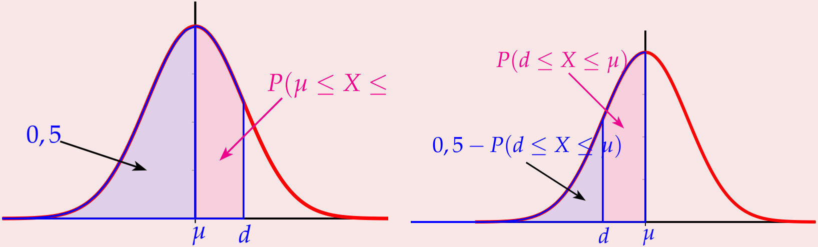
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Sa densité f est alors donnée par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

La courbe de f est appelée **gaussienne** et est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ ce qui permet d'en déduire des probabilités par symétrie autour de μ.

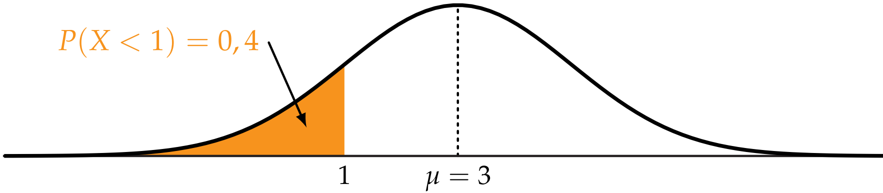


Rappel

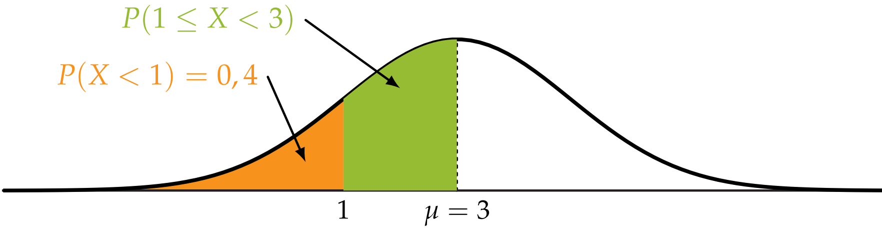


correction

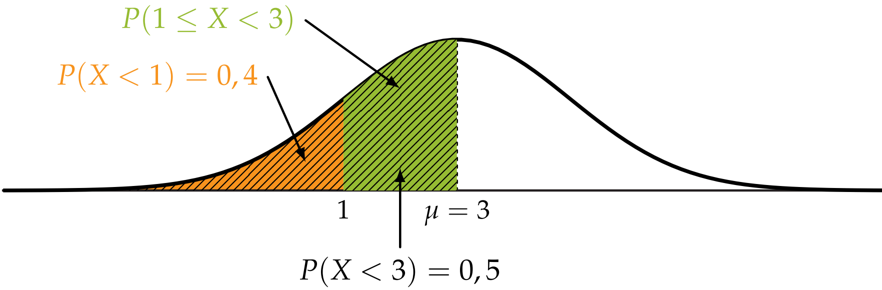
1



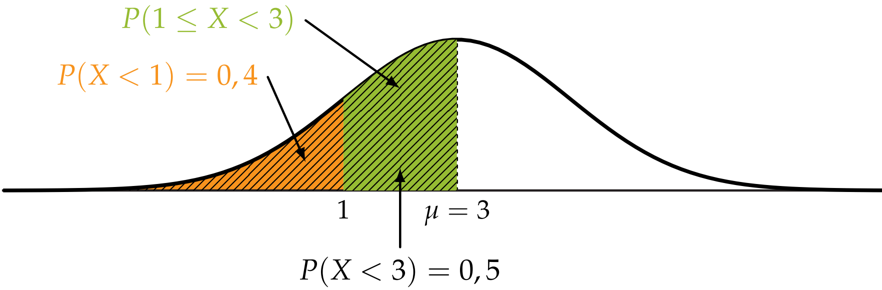
1



1



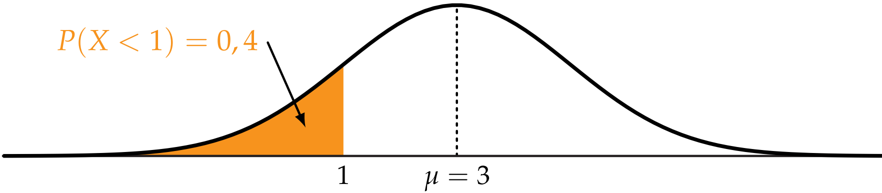
1



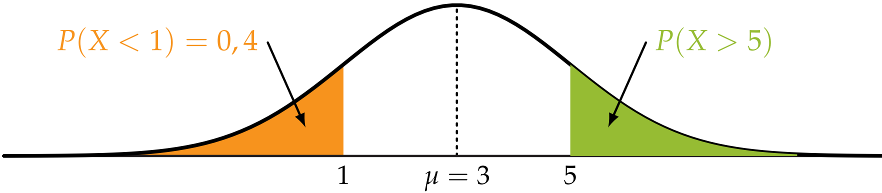
Ainsi, graphiquement, on a :

$$P(1 \leq X < 3) = 0,5 - 0,4 = 0,1$$

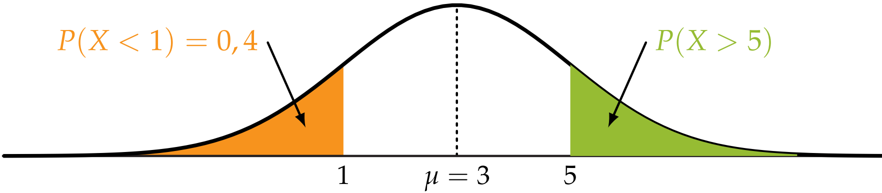
2



2



2



Ainsi, graphiquement par symétrie, on a :

$$P(X > 5) = 0,4$$

3

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ici, on a :

$$P_{(X<5)}(X \geqslant 1) = \frac{P\left((X < 5) \cap (X \geqslant 1)\right)}{P(X < 5)}$$

3

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

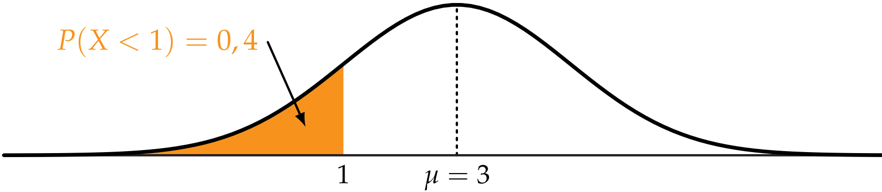
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ici, on a :

$$P_{(X<5)}(X \geqslant 1) = \frac{P\left((X < 5) \cap (X \geqslant 1)\right)}{P(X < 5)}$$
$$= \frac{P\left(1 \leq X < 5\right)}{P(X < 5)}$$

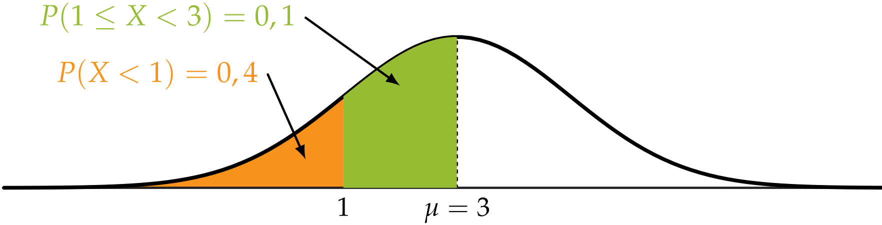
correction

3

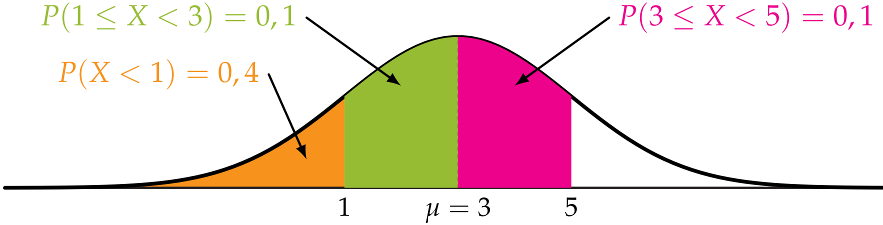


correction

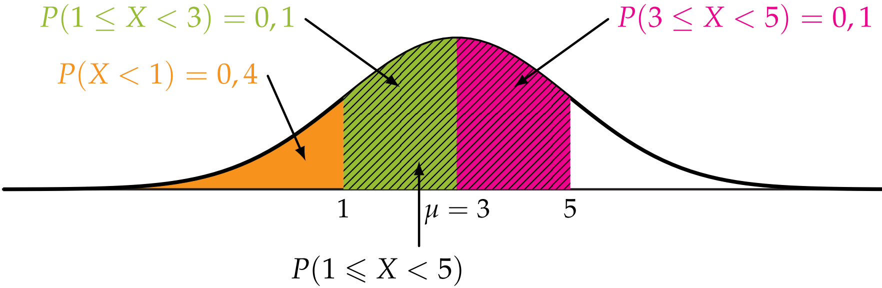
3



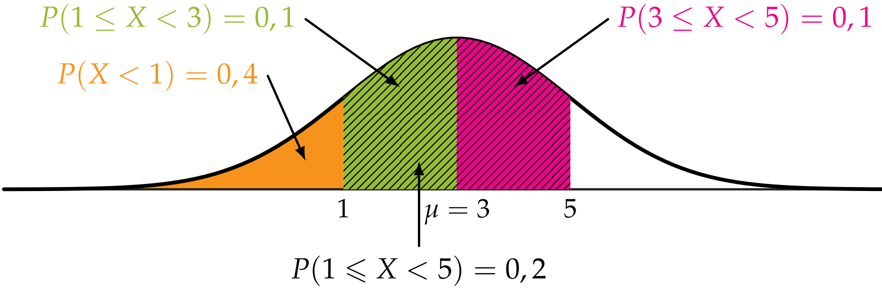
3



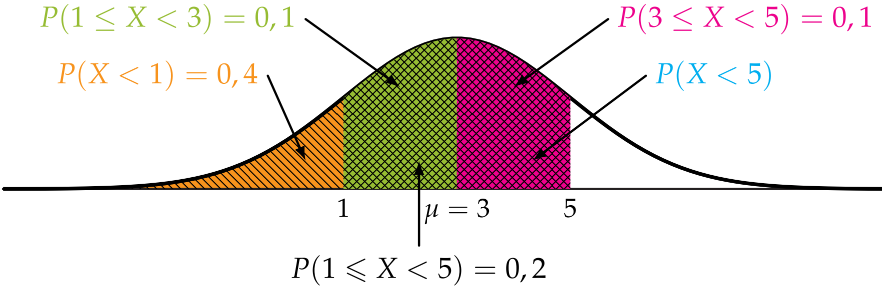
3



3

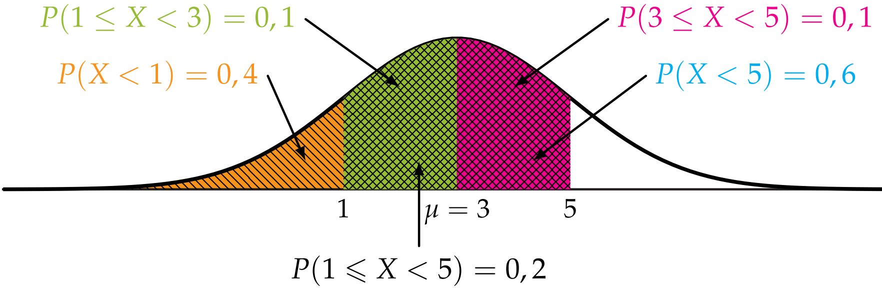


3

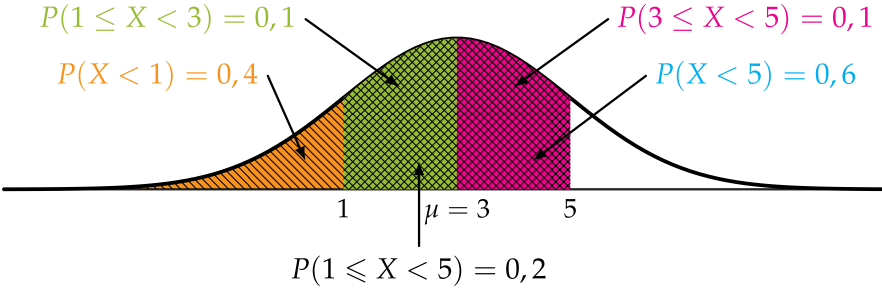


correction

3



3



Ainsi, graphiquement, on a :

$$P_{(X<5)}(X \geqslant 1) = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$