Auto-évaluation ex 4 page 355

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

On a relevé les probabilités des gains à un jeu télévisé. On note G la variable aléatoire qui donne le gain en euros.
Le tableau suivant donne la loi de probabilité de G.

g_i	1 000	2 000	5 000	10 000
$P(G = g_i)$	0,63	0,21	0,12	0,04

1. Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$.
2. Donner une interprétation de $E(G)$.
3. Dans un deuxième jeu, l'espérance est égale à 2 050, mais l'écart-type est de 20 000. Dans quel jeu les gains sont-ils les plus hétérogènes ?

1

Rappel

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; ...; p_n$.

- On appelle espérance de X le nombre :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i.$$

- On appelle variance de X le nombre :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + ... + p_n (x_n - E(X))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 .$$

- On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

correction

1

L'espérance de X est :

$$E(G) = 1\,000 \times P(G = 1\,000) + 2\,000 \times P(G = 2\,000) \\ + 5\,000 \times P(G = 5\,000) + 10\,000 \times P(G = 10\,000)$$

correction

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned}E(G) &= 1\,000 \times P(G = 1\,000) + 2\,000 \times P(G = 2\,000)\\&\qquad + 5\,000 \times P(G = 5\,000) + 10\,000 \times P(G = 10\,000)\\&= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04\end{aligned}$$

correction

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned} E(G) &= 1\,000 \times P(G = 1\,000) + 2\,000 \times P(G = 2\,000) \\ &\quad + 5\,000 \times P(G = 5\,000) + 10\,000 \times P(G = 10\,000) \\ &= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04 \\ E(G) &= 2\,050 \end{aligned}$$

correction

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned} E(G) &= 1\,000 \times P(G = 1\,000) + 2\,000 \times P(G = 2\,000) \\ &\qquad + 5\,000 \times P(G = 5\,000) + 10\,000 \times P(G = 10\,000) \\ &= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04 \\ E(G) &= 2\,050 \end{aligned}$$

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(G) = P(G = 1\,000) \times (1\,000 - 2\,050)^2 + P(G = 2\,000) \times (2\,000 - 2\,050)^2 \\ + P(G = 5\,000) \times (5\,000 - 2\,050)^2 + P(G = 10\,000) \times (10\,000 - 2\,050)^2 \end{aligned}$$

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned} E(G) &= 1\,000 \times P(G=1\,000) + 2\,000 \times P(G=2\,000) \\ &\qquad + 5\,000 \times P(G=5\,000) + 10\,000 \times P(G=10\,000) \\ &= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04 \\ E(G) &= 2\,050 \end{aligned}$$

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(G) &= P(G=1\,000) \times (1\,000-2\,050)^2 + P(G=2\,000) \times (2\,000-2\,050)^2 \\ &\qquad + P(G=5\,000) \times (5\,000-2\,050)^2 + P(G=10\,000) \times (10\,000-2\,050)^2 \\ &= 0{,}63\,(1\,000-2\,050)^2 + 0{,}21\,(2\,000-2\,050)^2 + 0{,}12\,(5\,000-2\,050)^2 + 0,04\,(10\,000-2\,050)^2 \end{aligned}$$

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned}E(G) &= 1\,000 \times P(G=1\,000) + 2\,000 \times P(G=2\,000)\\ &\qquad + 5\,000 \times P(G=5\,000) + 10\,000 \times P(G=10\,000)\\ &= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04\\ E(G) &= 2\,050\end{aligned}$$

La variance de X est :

$$\begin{aligned}V(G) &= P(G=1\,000) \times (1\,000 - 2\,050)^2 + P(G=2\,000) \times (2\,000-2\,050)^2\\ &\qquad + P(G=5\,000) \times (5\,000-2\,050)^2 + P(G=10\,000) \times (10\,000-2\,050)^2\\ &= 0{,}63\,(1\,000-2\,050)^2 + 0{,}21\,(2\,000-2\,050)^2 + 0{,}12\,(5\,000-2\,050)^2 + 0,04\,(10\,000-2\,050)^2\\ V(X) &= 4\,267\,500\end{aligned}$$

1

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned} E(G) &= 1\,000 \times P(G = 1\,000) + 2\,000 \times P(G = 2\,000) \\ &\qquad + 5\,000 \times P(G = 5\,000) + 10\,000 \times P(G = 10\,000) \\ &= 1\,000 \times 0,63 + 2\,000 \times 0,21 + 5\,000 \times 0,12 + 10\,000 \times 0,04 \\ E(G) &= 2\,050 \end{aligned}$$

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(G) &= P(G = 1\,000) \times (1\,000 - 2\,050)^2 + P(G = 2\,000) \times (2\,000 - 2\,050)^2 \\ &\qquad + P(G = 5\,000) \times (5\,000 - 2\,050)^2 + P(G = 10\,000) \times (10\,000 - 2\,050)^2 \\ &= 0{,}63\,(1\,000 - 2\,050)^2 + 0{,}21\,(2\,000 - 2\,050)^2 + 0{,}12\,(5\,000 - 2\,050)^2 + 0,04\,(10\,000 - 2\,050)^2 \\ V(X) &= 4\,267\,500 \end{aligned}$$

L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2\,065{,}793$$

2. Comme $E(G) = 2\,050$, cela signifie que sur un grand nombre de parties de ce jeu, en moyenne, le gain est de $2\,050$ €.

correction

2. Comme $E(G) = 2\,050$, cela signifie que sur un grand nombre de parties de ce jeu, en moyenne, le gain est de $2\,050$ €.

3. Plus l'écart-type est grand, plus les gains sont hétérogènes donc ils le sont plus dans le deuxième jeu.