QCM d'autoévaluation, exercice 96 page 382

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
On sait que $P(X < 20) = 0{,}5$. Le paramètre λ vaut :

a) $0{,}5$ b) $\dfrac{\ln(2)}{20}$ c) $\dfrac{\ln(0{,}5)}{20}$

correction

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.

On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

correction

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.

On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$P(X < 20) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5$$

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.
On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$P(X < 20) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5$$

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.
On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$\begin{aligned} P(X < 20) = 0{,}5 &\Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5 \\ &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \end{aligned}$$

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.
On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$\begin{aligned} P(X < 20) = 0{,}5 &\Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5 \\ &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,5) \end{aligned}$$

correction

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.

On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$
\begin{aligned}
P(X < 20) = 0{,}5 &\Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5 \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,5) \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,5)}{-20}
\end{aligned}
$$

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.
On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$\begin{aligned}
P(X < 20) = 0{,}5 &\Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5 \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,5) \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,5)}{-20} = \frac{-\ln(2)}{-20} = \frac{\ln(2)}{20}
\end{aligned}$$

Rappel

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et a, c et d trois réels positifs.

On a alors :

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

$$
\begin{aligned}
P(X < 20) = 0{,}5 &\Leftrightarrow P(X \leq 20) = 0{,}5 \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,5 \\
&\Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,5) \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,5)}{-20} = \frac{-\ln(2)}{-20} = \frac{\ln(2)}{20}
\end{aligned}
$$

réponse **b)**