Exercice 21 page 340

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé (D'après bac)

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non :

$30\,\%$ des dragées contiennent une amande ;

$40\,\%$ des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;

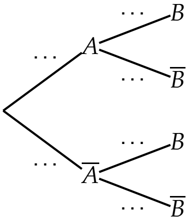
$75\,\%$ des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les évènements :

A : « la dragée choisie contient une amande » ;

B : « la dragée choisie est bleue ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$.
3. Calculer $P(B)$.
4. En déduire $P_B(A)$.
5. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.
6. Sophie préfère les dragées contenant une amande.
   Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou bien une dragée rose ?



correction

1

Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

1

Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;

correction

1

Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

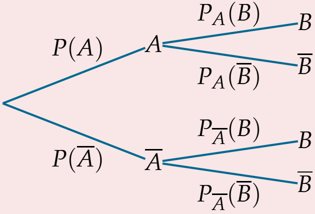
- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2^e, 3^e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

1

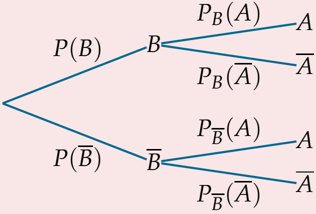
Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.
- Dans le cas de deux évènements A et B de probabilités non nulles, on a :

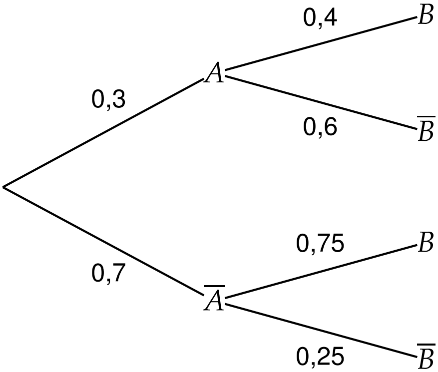


ou



C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.

1



2

Rappel

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

2

Rappel

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :

la probabilité de l'évènement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

2

Rappel

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :

la probabilité de l'évènement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ici, on a donc d'après l'arbre de probabilités précédent :

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

3

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

3

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

- D'une manière plus générale, si A_1, A_2, ... et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P\left(A_2 \cap B\right) + \ldots + P\left(A_n \cap B\right) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P\left(A_2\right) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P\left(A_n\right) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

3

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

- D'une manière plus générale, si $A_1, A_2, \ldots$ et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P\left(A_2 \cap B\right) + \ldots + P\left(A_n \cap B\right) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P\left(A_2\right) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P\left(A_n\right) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

Cette formule permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés :

la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.

3. Ici, on a donc, d'après l'arbre pondéré :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$$

3. Ici, on a donc, d'après l'arbre pondéré :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,75 \end{aligned}$$

3 Ici, on a donc, d'après l'arbre pondéré :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,75 \\ &= 0,645 \end{aligned}$$

4

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

4

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ici, on a donc d'après les questions précédentes :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,645} = \frac{8}{43} \approx 0,186$$

5 On a :

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

5. On a :

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Or, d'après l'arbre pondéré :

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

5 On a :

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Or, d'après l'arbre pondéré :

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

De plus,

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,645 = 0,355$$

5 On a :

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Or, d'après l'arbre pondéré :

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

De plus,

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,645 = 0,355$$

Ainsi,

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{0,18}{0,355} = \frac{36}{71} \approx 0,507$$

6. Comme

$$P_{\overline{B}}(A) > P_B(A)$$

6 Comme

$$P_{\overline{B}}(A) > P_B(A)$$

Sophie doit plutôt choisir une dragée rose.