QCM d'autoévaluation, exercice 61 page 348

Sésamath

Maths TS obligatoire

Math le dit lui-même « je ne triche que rarement, disons $5\,\%$ du temps, mais quand je triche, je gagne à coup sûr ! ». Ce soir, il joue à un jeu de plateau avec quatre de ses amis et, comme ils sont tous de même niveau, on estime qu'ils ont tous une probabilité de victoire de $\dfrac{1}{5}$, si Math ne triche pas...

Math gagne une partie, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

a) $\dfrac{5}{24}$

b) $0{,}05$

c) $\dfrac{1}{20}$

Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;

correction

Rappel

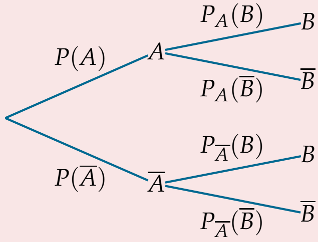
Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2^{e}, 3^{e}, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

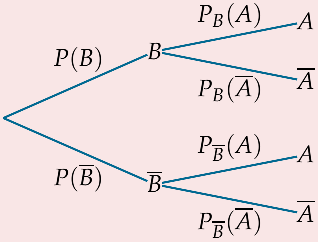
Rappel

Les principales règles de construction des arbres pondérés (ou arbres probabilistes) sont :

- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.
- Dans le cas de deux évènements A et B de probabilités non nulles, on a :



ou



C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.

correction

On considère les évènements :

T : « Math triche »

G : « Math gagne »

On a l'arbre pondéré suivant :

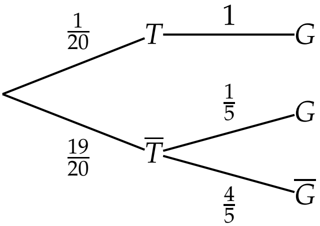
correction

On considère les évènements :

T : « Math triche »

G : « Math gagne »

On a l'arbre pondéré suivant :



correction

On cherche $P_G(T)$

correction

On cherche $P_G\left(T\right)$

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On cherche $P_G\left(T\right)$

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ici,

$$P_G\left(T\right) = \frac{P(T \cap G)}{P(T)}$$

correction

On cherche $P_G\left(T\right)$

Rappel

Si $P(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

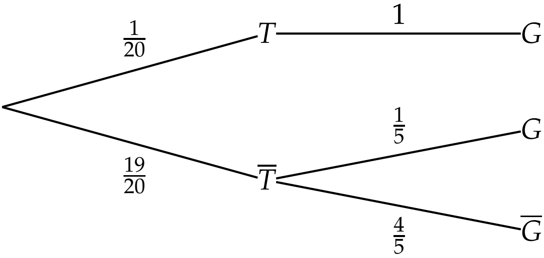
Ici,

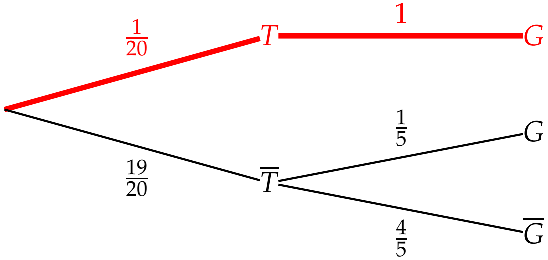
$$P_G\left(T\right) = \frac{P(T \cap G)}{P(T)}$$

Rappel

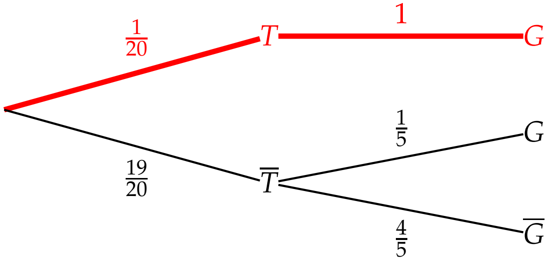
Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.
Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :

la probabilité de l'évènement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.


$\frac{1}{20}$
T
1
G
$\frac{19}{20}$
$\overline{T}$
$\frac{1}{5}$
G
$\frac{4}{5}$
$\overline{G}$



$\frac{1}{20}$
T
1
G
$\frac{19}{20}$
$\overline{T}$
$\frac{1}{5}$
G
$\frac{4}{5}$
$\overline{G}$



Ainsi,

$$P(T \cap G) = \frac{1}{20} \times 1 = \frac{1}{20}$$

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

- D'une manière plus générale, si $A_1, A_2, \ldots$ et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P\left(A_2 \cap B\right) + \ldots + P\left(A_n \cap B\right) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P\left(A_2\right) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P\left(A_n\right) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

correction

Rappel : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

- D'une manière plus générale, si $A_1, A_2, \ldots$ et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

Cette formule permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés :

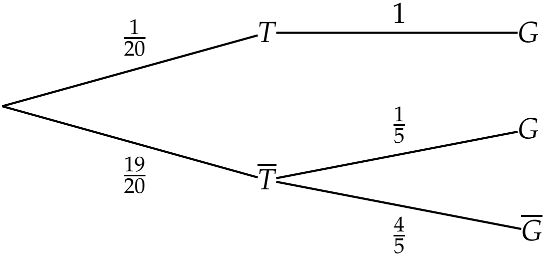
la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.

correction

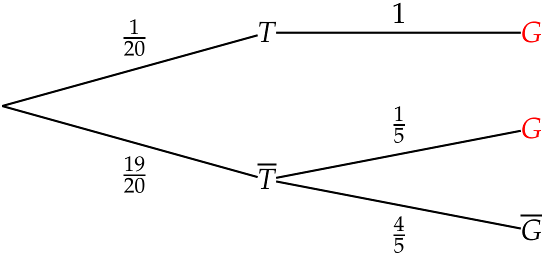
On cherche $P\left(G\right)$

correction

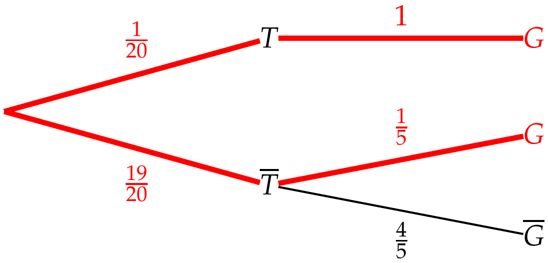
On cherche $P\left(G\right)$



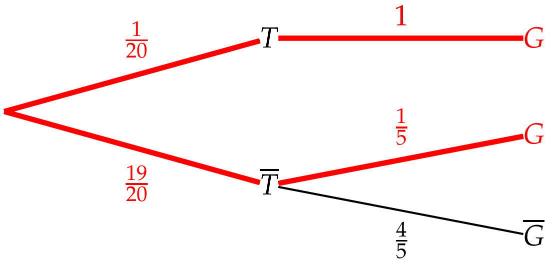
On cherche $P(G)$



On cherche $P(G)$



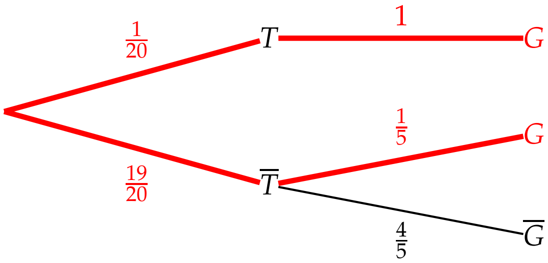
On cherche $P(G)$



Ainsi,

$$p(G) = \frac{1}{20} \times 1 + \frac{19}{20} \times \frac{1}{5}$$

On cherche $P\left(G\right)$



Ainsi,

$$p(G) = \frac{1}{20} \times 1 + \frac{19}{20} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25}$$

correction

Par conséquent,

correction

Par conséquent,

$$P_G(T) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{6}{25}}$$

Par conséquent,

$$P_G(T) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{6}{25}} = \frac{5}{24}$$

Par conséquent,

$$P_G(T) = \frac{\dfrac{1}{20}}{\dfrac{6}{25}} = \frac{5}{24}$$

réponse **a)**