Exercice 66 page 319

Sésamath

Maths TS obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x+y+2z-3=0 \quad \text{et} \quad -x+4y-5z+6=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

correction

Méthode

Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
2. Si les plan ne sont pas parallèles :
   1. écrire le système composé des équations décrivant $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;
   2. choisir une des coordonnées comme paramètre ;
   3. en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Un vecteur normal de $(\mathscr{P}_1)$ est :

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Un vecteur normal de $(\mathscr{P}_1)$ est :

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal de $(\mathscr{P}_2)$ est :

$$\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$$

correction

Les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas proportionnelles, $\left(\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{4}\right)$, Les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas proportionnelles, $\left(\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{4}\right)$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires

Les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas proportionnelles, $\left(\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{4}\right)$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas proportionnelles, $\left(\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{4}\right)$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).
Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

Les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas proportionnelles, $\left(\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{4}\right)$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).
Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ -x+4y-5z+6=0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ -x + 4y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ -x + 4y - 5z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y - 2z \\ -(3 - y - 2z) + 4y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ -x+4y-5z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ -(3-y-2z)+4y-5z+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ 3+5y-3z=0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ -x+4y-5z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ -(3-y-2z)+4y-5z+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ 3+5y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2\left(1+\dfrac{5}{3}y\right) \\ z=1+\dfrac{5}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ -x+4y-5z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ -(3-y-2z)+4y-5z+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2z \\ 3+5y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-2\left(1+\dfrac{5}{3}y\right) \\ z=1+\dfrac{5}{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{13}{3}y \\ \\ z=1+\dfrac{5}{3}y \end{cases}$$

correction

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d) d'équation paramétrique :

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d) d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{13}{3}t \\ y = t \\ z = 1 + \dfrac{5}{3}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$