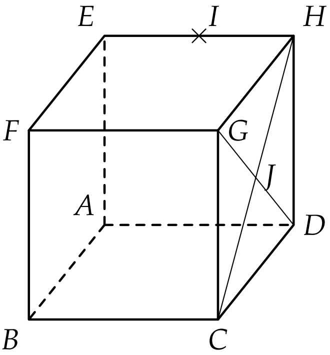
Activités mentales ex 5 page 312

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GE}$
2. $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GD}$
3. $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG}$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

correction

1. Par construction du cube,

   la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

correction

1. Par construction du cube,

   la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

correction

1. Par construction du cube,

   la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (BF) est orthogonale au plan (FEG).

1. Par construction du cube,

   la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (BF) est orthogonale au plan (FEG).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

1. Par construction du cube,

   la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (BF) est orthogonale au plan (FEG).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que la droite (BF) est orthogonale à la droite (GE) incluse dans le plan (FEG).

1. Par construction du cube,

la droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) sécantes et incluses dans le plan (FEG).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (BF) est orthogonale au plan (FEG).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que la droite (BF) est orthogonale à la droite (GE) incluse dans le plan (FEG).

Par conséquent,

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GE} = 0$$

2. Par construction du cube,

la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

2. Par construction du cube,

   la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

correction

2. Par construction du cube,

   la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (GF) est orthogonale au plan (GHC).

2. Par construction du cube,

la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (GF) est orthogonale au plan (GHC).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

2. Par construction du cube,

la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (GF) est orthogonale au plan (GHC).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que la droite (GF) est orthogonale à la droite (GD) incluse dans le plan (GHC).

2. Par construction du cube,

la droite (GF) est perpendiculaire aux droites (GH) et (GC) sécantes et incluses dans le plan (GHC).

Rappel

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Par conséquent, la droite (GF) est orthogonale au plan (GHC).

Rappel

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que la droite (GF) est orthogonale à la droite (GD) incluse dans le plan (GHC).

Par conséquent,

$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GS} = 0$$

3

Rappel

- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

3

Rappel

- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

On va utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \overrightarrow{CG}$$

3

Rappel

- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG}\end{aligned}$$

3

Rappel

- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG} \end{aligned}$$

3. Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

3. Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

On a donc :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

3. Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

On a donc :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

On a donc :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG}$$

3 Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

On a donc :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} \end{aligned}$$

3 Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

On a donc :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} \\ &= CG \times CG\end{aligned}$$

3 Par construction du cube,

la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (BF) et la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (CG).

On a donc :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CG}=0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{CG}\\ &= \overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CG}\\ &= CG\times CG\\ &= a^2\end{aligned}$$

correction

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG}$$

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}FG \times FG\end{aligned}$$

4

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \cdot \overrightarrow{FG}$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}FG \times FG \\ &= \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$