Exercice 52 page 318

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -5-t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x-3y+z-6=0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Méthode

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
   1. si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   2. si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Rappel

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$.

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un vecteur directeur de (d) est :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Rappel

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax + by + cz + d = 0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.
- Réciproquement : L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

On a alors

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + (-3) \times 2 + 1 \times (-1) = -9 \neq 0$$

On a alors

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + (-3) \times 2 + 1 \times (-1) = -9 \neq 0$$

Ainsi, (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

On a alors

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + (-3) \times 2 + 1 \times (-1) = -9 \neq 0$$

Ainsi, (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \\ -2x - 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \\ -2x - 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \\ -2x-3y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \\ -2(-7+t)-3(4+2t)+(-5-t)-6=0 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \\ -2x - 3y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \\ -2(-7 + t) - 3(4 + 2t) + (-5 - t) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \\ z = -4 \\ t = -1 \end{cases}$$

correction

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \\ -2x-3y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \\ -2(-7+t)-3(4+2t)+(-5-t)-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \\ z = -4 \\ t = -1 \end{cases}$$

Ainsi, (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M de coordonnées

$$(-8\,;2\,;-4).$$