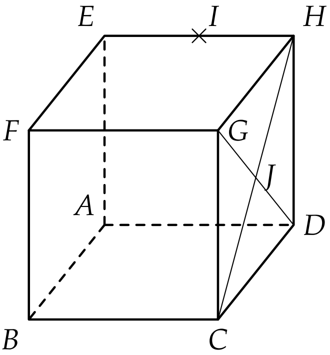
Activités mentales ex 4 page 312

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI}$
2. $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ}$
4. $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FB}$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

correction

1. On a :

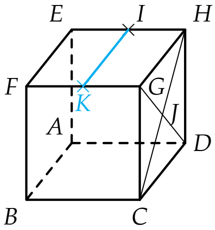
$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FI}$$

correction

1. On a :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FI}$$

Soit K le milieu de $[FG]$

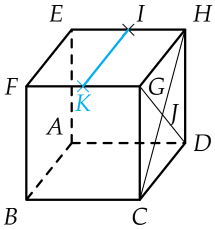


alors K est le projeté orthogonal de I sur (FG) dans le plan (FGE) donc

1 On a :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FI}$$

Soit K le milieu de $[FG]$



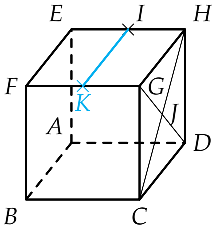
alors K est le projeté orthogonal de I sur (FG) dans le plan (FGE) donc

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FK}$$

1 On a :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FI}$$

Soit K le milieu de $[FG]$



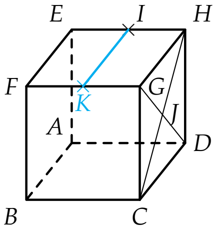
alors K est le projeté orthogonal de I sur (FG) dans le plan (FGE) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FK} \\ &= FG \times FK\end{aligned}$$

1 On a :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FI}$$

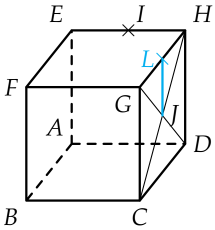
Soit K le milieu de $[FG]$



alors K est le projeté orthogonal de I sur (FG) dans le plan (FGE) donc

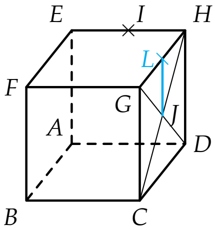
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FI} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FK}\\ &= FG \times FK\\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

2 Soit L le milieu de $[GH]$



alors L est le projeté orthogonal de J sur (GH) dans le plan (CGH) donc

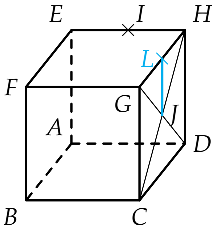
2 Soit L le milieu de $[GH]$



alors L est le projeté orthogonal de J sur (GH) dans le plan (CGH) donc

$$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GL}$$

2 Soit L le milieu de $[GH]$

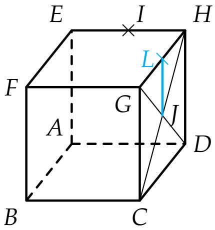


alors L est le projeté orthogonal de J sur (GH) dans le plan (CGH) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ} &= \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GL}\\ &= GH\times GL\end{aligned}$$

correction

2 Soit L le milieu de $[GH]$



alors L est le projeté orthogonal de J sur (GH) dans le plan (CGH) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ} &= \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GL}\\ &= GH\times GL\\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

3

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ} = -\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ}$$

correction

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ} &= -\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}\\ &= -\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

correction

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ} &= -\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}\\ &= -\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

4

$$\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}$$

correction

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GJ} &= -\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GJ} \\ &= -\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{FB} &= -\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HD} \\ &= 0\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ} &= -\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GJ}\\ &= -\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{FB} &= -\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HD}\\ &= 0\end{aligned}$$

car les droites (HI) et (HD) sont perpendiculaires dans le plan (ADH).