Exercice 46 page 317

Sésamath

Maths TS obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les trois points

$$A(-1\,;-1\,;1),\ B(1\,;2\,;-1)\text{ et }C(0\,;1\,;1).$$

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

correction

Méthode

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode suivante :

correction

Méthode

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode suivante :
   Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:
   1. écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
   2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

correction

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

correction

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles car

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$$

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles car

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

correction

On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles car

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et

les points A, B et C ne sont pas alignés, ils forment donc bien un plan.

correction

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

correction

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. On a alors

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

correction

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. On a alors

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

ce qui donne les équations

$$2a + 3b - 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad a + 2b = 0,$$

correction

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. On a alors

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

ce qui donne les équations

$$2a + 3b - 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad a + 2b = 0,$$

d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} 2a + 3b - 2c & = & 0 \\ a + 2b & = & 0 \end{cases}$$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. On a alors

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

ce qui donne les équations

$$2a + 3b - 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad a + 2b = 0,$$

d'où le système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 3b - 2c & = & 0 \\ a + 2b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -b - 2c & = & 0 \\ a & = & -2b \end{array} \right.$$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$. On a alors

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,$$

ce qui donne les équations

$$2a+3b-2c=0 \qquad \text{et} \qquad a+2b=0,$$

d'où le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+3b-2c & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -b-2c & = & 0 \\ a & = & -2b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & -\dfrac{1}{2}b \\ & & \\ a & = & -2b \end{array}\right.$$

correction

Les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} -2b \\ b \\ -\dfrac{1}{2}b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^*.$$

correction

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} -2b \\ b \\ -\dfrac{1}{2}b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^*.$$

Avec $b = -2$, on obtient

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$4x-2y+1z+d=0.$$

correction

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$4x-2y+1z+d=0.$$

Or, $C(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$4x_C-2y_C+z_C+d=0.$$

correction

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$4x-2y+1z+d=0.$$

Or, $C(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$4x_C-2y_C+z_C+d=0.$$

Ainsi,

$$4x_C-2y_C+z_C+d=0 \Leftrightarrow 4\times 0-2\times 1+1+d=0$$

correction

$\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$4x - 2y + 1z + d = 0.$$

Or, $C(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$4x_C - 2y_C + z_C + d = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 4x_C - 2y_C + z_C + d = 0 &\Leftrightarrow 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 1 \end{aligned}$$

correction

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$4x-2y+1z+d=0.$$

Or, $C(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$4x_C-2y_C+z_C+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}4x_C-2y_C+z_C+d=0 &\Leftrightarrow 4\times 0-2\times 1+1+d=0\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est donc :

$$4x-2y+z+1=0.$$