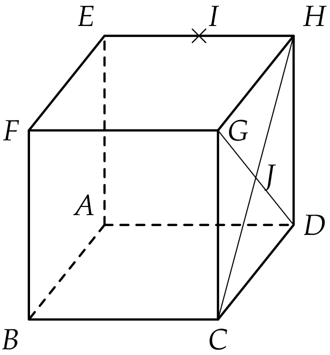
Activités mentales ex 3 page 312

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a > 0$.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



Exprimer en fonction de a les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH}$
3. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC}$
4. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC}$
5. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$
6. $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{GD}$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\end{aligned}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

2.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} \quad \text{car } A \text{ est le projeté orthogonal de } D \text{ sur } (BA) \text{ dans le plan } (ABC)\end{aligned}$$

correction

1. B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} \quad \text{car } A \text{ est le projeté orthogonal de } D \text{ sur } (BA) \text{ dans le plan } (ABC)\\ &= -\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\end{aligned}$$

1 B est le projeté orthogonal de C sur (AB) dans le plan (ABC) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} \quad \text{car } A \text{ est le projeté orthogonal de } D \text{ sur } (BA) \text{ dans le plan } (ABC)\\ &= -\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\\ &= -a^2\end{aligned}$$

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EA}\\ &= 0\end{aligned}$$

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$
$$= 0$$

car les droites (EH) et (EA) sont perpendiculaires

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$
$$= 0$$

car les droites (EH) et (EA) sont perpendiculaires

4

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FC}$$

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$
$$= 0$$

car les droites (EH) et (EA) sont perpendiculaires

4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG}\end{aligned}$$

car G est le projeté orthogonal de C sur (FG) dans le plan (CFG)

correction

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$
$$= 0$$

car les droites (EH) et (EA) sont perpendiculaires

4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \quad \text{car } G \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (FG) \text{ dans le plan } (CFG) \\ &= \left\|\overrightarrow{FG}\right\|^2\end{aligned}$$

3

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$$
$$= 0$$

car les droites (EH) et (EA) sont perpendiculaires

4

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \quad \text{car } G \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (FG) \text{ dans le plan } (CFG) \\ &= \left\|\overrightarrow{FG}\right\|^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

5. C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

5 C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

5 C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\end{aligned}$$

5 C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

5 C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

6

$$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD} = 0$$

5 C est le projeté orthogonal de G sur (BC) dans le plan (BCG) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\\ &= a^2\end{aligned}$$

6

$$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{GD} = 0$$

car les droites (HC) et (GD) étant les diagonales du carré $CDHG$, elles sont perpendiculaires