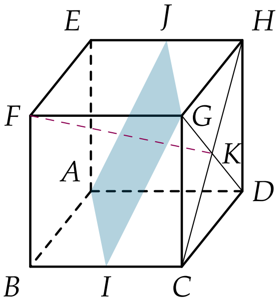
Exercice 28 page 315

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



Sans utiliser de repère :

1. démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;
2. a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;
   b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;
   c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

correction

1. On a :

1. On a :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$$

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\end{aligned}$$

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{JH}\end{aligned}$$

correction

1. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\
&= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{JH} \\
&= \overrightarrow{JG}
\end{aligned}$$

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{JH} \\ &= \overrightarrow{JG}\end{aligned}$$

On en déduit que $AIGJ$ est un parallélogramme

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{JH} \\ &= \overrightarrow{JG}\end{aligned}$$

On en déduit que $AIGJ$ est un parallélogramme et par conséquent, les points A, I, G et J sont coplanaires.

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que
$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \overrightarrow{HC}$$

correction

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que
$$\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{IJ}&=\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GK}\right)\cdot\overrightarrow{HC}\\&=\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{HC}$ et
$$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HC}=0$$

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{HC}$ et

$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$$

De plus, (GK) et (HC) sont les diagonales d'un carré, donc orthogonales et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$$

2 a) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (IJ), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{HC}$ et

$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$$

De plus, (GK) et (HC) sont les diagonales d'un carré, donc orthogonales et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

On en déduit donc que

(FK) est orthogonale à (IJ).

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que
$$\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

correction

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right)$$

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

correction

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) \\
&= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI}
\end{aligned}$$

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI}&=\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\\&=\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{BI}\\&=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

Or, (BC) et (AB) sont les côtés consécutifs d'un carré, donc orthogonales et

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que
$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) \\ &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

Or, (BC) et (AB) sont les côtés consécutifs d'un carré, donc orthogonales et
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

De plus, soit L le milieu de $[GH]$ alors L est le projeté orthogonal de K sur (GH) donc
$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{GH}$$

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) \\
&= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI}
\end{aligned}$$

Or, (BC) et (AB) sont les côtés consécutifs d'un carré, donc orthogonales et

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

De plus, soit L le milieu de $[GH]$ alors L est le projeté orthogonal de K sur (GH) donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{GH} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GH}
\end{aligned}$$

2 b) Pour montrer que (FK) est orthogonale à (AI), on va prouver que

$$\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right)\\ &= \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

Or, (BC) et (AB) sont les côtés consécutifs d'un carré, donc orthogonales et

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

De plus, soit L le milieu de $[GH]$ alors L est le projeté orthogonal de K sur (GH) donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GK}\cdot\overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{GL}\cdot\overrightarrow{GH}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GH}\\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

2 b) Enfin, $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{GK}$ et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$$

2 b) Enfin, $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{GK}$ et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0$$

2 b) Enfin, $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{GK}$ et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 b) Enfin, $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{GK}$ et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que

(FK) est orthogonale à (AI).

2 b) Enfin, $\overrightarrow{BI}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{GK}$ et

$$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} &= 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit donc que

(FK) est orthogonale à (AI).

2 c) (FK) est orthogonale à deux droites sécantes (AI) et (IJ) du plan (AIG), elle est donc orthogonale à ce plan.