Activités mentales ex 1 page 312

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Calculer :

1. $\|\vec{u}\|$
2. $\|\vec{v}\|$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
4. θ

correction

1

Rappel :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1. On a donc :

1. On a donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

1. On a donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

soit

$$\|\vec{u}\| = 2$$

correction

1. On a donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

soit

$$\|\vec{u}\| = 2$$

2. De même,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}$$

correction

1. On a donc :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

soit

$$\|\vec{u}\| = 2$$

2. De même,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}$$

soit

$$\|\vec{v}\| = 3$$

3

Rappel :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On a donc :

3

Rappel :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On a donc :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 0 + \sqrt{2}\times 2\sqrt{2} + (-1)\times 1$$

3

Rappel :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + (-1) \times 1$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

4

Rappel :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant. On a notamment :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}), \text{ lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

4

Rappel :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant. On a notamment :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}), \text{ lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Méthode : Calculer la mesure d'un angle

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

4. On a donc :

4. On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

correction

4 On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\cos(\theta)$$

4. On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\cos(\theta)$$

Or,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

4 On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\cos(\theta)$$

Or,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

donc

$$3 = 6\cos(\theta)$$

4. On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\cos(\theta)$$

Or,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

donc

$$3 = 6\cos(\theta)$$

et

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

4 On a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(\theta)$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\cos(\theta)$$

Or,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

donc

$$3 = 6\cos(\theta)$$

et

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$\theta = 60^\circ$$