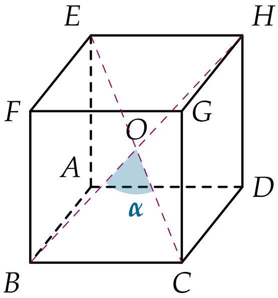
Activités mentales ex 16 page 313

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.



Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

Méthode : calculer la mesure d'un angle

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

Méthode : calculer la mesure d'un angle

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

En utilisant la formule avec le cosinus :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \times OC \times \cos \widehat{BOC}$$

Méthode : calculer la mesure d'un angle

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

En utilisant la formule avec le cosinus :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \times OC \times \cos \widehat{BOC}$$

Ainsi ,

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{OB \times OC}$$

correction

En utilisant les **coordonnées** :
dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

correction

En utilisant les **coordonnées** :
dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$$B(1\,;0\,;0) \qquad , \qquad C(1\,;1\,;0) \qquad \text{et} \qquad O(0{,}5\,;0{,}5\,;0{,}5)$$

En utilisant les **coordonnées** :
dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$ et $O(0{,}5\,;0{,}5\,;0{,}5)$

Ainsi,

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

En utilisant les **coordonnées** :
dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$ et $O(0{,}5\,;0{,}5\,;0{,}5)$

Ainsi,

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0,5\times 0,5 + (-0,5)\times 0,5 + (-0,5)\times(-0,5)$$

En utilisant les **coordonnées** :
dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

B(1 ; 0 ; 0) , C(1 ; 1 ; 0) et O(0,5 ; 0,5 ; 0,5)

Ainsi,

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-0,5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} &= 0,5\times 0,5+(-0,5)\times 0,5+(-0,5)\times(-0,5)\\ &= 0,25\end{aligned}$$

De plus,

correction

De plus,

$$OB = \sqrt{0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

et

$$OC = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

De plus,

$$OB = \sqrt{0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

et

$$OC = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

On a donc :

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{0,25}{\sqrt{0,75} \times \sqrt{0,75}}$$

De plus,

$$OB = \sqrt{0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

et

$$OC = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

On a donc :

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{0,25}{\sqrt{0,75} \times \sqrt{0,75}}$$

Soit,

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{1}{3}$$

De plus,

$$OB = \sqrt{0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

et

$$OC = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,75}$$

On a donc :

$$\cos\widehat{BOC} = \frac{0,25}{\sqrt{0,75} \times \sqrt{0,75}}$$

Soit,

$$\cos\widehat{BOC} = \frac{1}{3}$$

Par conséquent,

$$\widehat{BOC} \approx 71^\circ$$