Activités mentales ex 10 page 312

Sésamath

Maths TS obligatoire

énoncé

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1. $A(0\,;1\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$
2. $A(-1\,;4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$
3. $A(-1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$
4. $A(-1\,;1\,;6)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-4\\2\end{pmatrix}$

Méthode

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

1 $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$2x - 3y + 1z + d = 0.$$

correction

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$2x-3y+1z+d=0.$$

Or, $A(0\,;1\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$2x_A-3y_A+z_A+d=0.$$

correction

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$2x - 3y + 1z + d = 0.$$

Or, $A(0\,;1\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$2x_A - 3y_A + z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$2x_A - 3y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2\times 0 - 3\times 1 + 2 + d = 0$$

correction

1 $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$2x-3y+1z+d=0.$$

Or, $A(0\,;1\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$2x_A-3y_A+z_A+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2x_A-3y_A+z_A+d=0 &\Leftrightarrow 2\times 0-3\times 1+2+d=0\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

1 $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$2x - 3y + 1z + d = 0.$$

Or, $A(0\,;1\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$2x_A - 3y_A + z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2x_A - 3y_A + z_A + d = 0 &\Leftrightarrow 2\times 0 - 3\times 1 + 2 + d = 0\\ &\Leftrightarrow d = 1\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est donc :

$$2x - 3y + z + 1 = 0.$$

2 $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$5x-1y+2z+d=0.$$

2 $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$5x - 1y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;4\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$5x_A - y_A + 2z_A + d = 0.$$

correction

2 $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$5x - 1y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;4\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$5x_A - y_A + 2z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$5x_A - y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow 5 \times (-1) - 4 + 2 \times 1 + d = 0$$

correction

2 $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$5x - 1y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;4\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$5x_A - y_A + 2z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}5x_A - y_A + 2z_A + d = 0 &\Leftrightarrow 5 \times (-1) - 4 + 2 \times 1 + d = 0\\ &\Leftrightarrow d = 7\end{aligned}$$

2 $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$5x - 1y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;4\,;1)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$5x_A - y_A + 2z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}5x_A - y_A + 2z_A + d = 0 &\Leftrightarrow 5\times(-1) - 4 + 2\times 1 + d = 0\\ &\Leftrightarrow d = 7\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est donc :

$$5x - y + 2z + 7 = 0.$$

3 $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$-7x+2y-4z+d=0.$$

correction

3. $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$-7x+2y-4z+d=0.$$

Or, $A(-1\,;2\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$-7x_A+2y_A-4z_A+d=0.$$

3 $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$-7x+2y-4z+d=0.$$

Or, $A(-1\,;2\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$-7x_A+2y_A-4z_A+d=0.$$

Ainsi,

$$-7x_A+2y_A-4z_A+d=0 \Leftrightarrow -7\times(-1)+2\times2-4\times2+d=0$$

correction

3 $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$-7x+2y-4z+d=0.$$

Or, $A(-1\,;2\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$-7x_A+2y_A-4z_A+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-7x_A+2y_A-4z_A+d=0 &\Leftrightarrow -7\times(-1)+2\times2-4\times2+d=0\\ &\Leftrightarrow d=-3\end{aligned}$$

3 $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$-7x+2y-4z+d=0.$$

Or, $A(-1\,;2\,;2)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$-7x_A+2y_A-4z_A+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-7x_A+2y_A-4z_A+d=0 &\Leftrightarrow -7\times(-1)+2\times 2-4\times 2+d=0\\ &\Leftrightarrow d=-3\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est donc :

$$-7x+2y-4z-3=0.$$

4 $\vec{n}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$8x - 4y + 2z + d = 0.$$

4 $\vec{n}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$8x - 4y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;1\,;6)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$8x_A - 4y_A + 2z_A + d = 0.$$

4 $\vec{n}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$8x - 4y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;1\,;6)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$8x_A - 4y_A + 2z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$8x_A - 4y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow 8 \times (-1) - 4 \times 1 + 2 \times 6 + d = 0$$

correction

4 $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$8x-4y+2z+d=0.$$

Or, $A(-1\,;1\,;6)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$8x_A-4y_A+2z_A+d=0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}8x_A-4y_A+2z_A+d=0 &\Leftrightarrow 8\times(-1)-4\times 1+2\times 6+d=0\\ &\Leftrightarrow d=0\end{aligned}$$

4 $\vec{n}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$8x - 4y + 2z + d = 0.$$

Or, $A(-1\,;1\,;6)$ est un point de $(\mathscr{P})$ donc :

$$8x_A - 4y_A + 2z_A + d = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 8x_A - 4y_A + 2z_A + d = 0 &\Leftrightarrow 8 \times (-1) - 4 \times 1 + 2 \times 6 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est donc :

$$8x - 4y + 2z = 0.$$