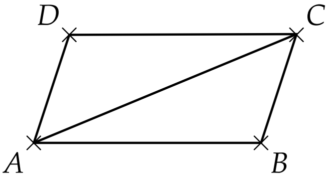
Auto-évaluation ex 2 page 299

Sésamath

Maths TS obligatoire

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 5$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. a) En déduire aussi que la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, au dixième de degré près.

   b) En remarquant que $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$, en déduire que $BD = \sqrt{15}$.

correction

1

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

1

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

correction

1

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)\end{aligned}$$

correction

1

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(5^2 - 4^2 - 2^2\right)
\end{aligned}$$

1

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(5^2 - 4^2 - 2^2\right) \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

correction

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

correction

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{5}{2} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{5}{2} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

et

$$\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \frac{5}{16}$$

2 a)

Rappel

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

Par conséquent,

$$\frac{5}{2} = 8\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

et

$$\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \frac{5}{16}$$

d'où

$$\widehat{BAD} \approx 71{,}8°.$$

correction

2 a) On a

$$\begin{aligned} BD^2 &= \overrightarrow{BD}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \end{aligned}$$

2 a) On a

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

2 a) On a

$$
\begin{aligned}
BD^2 &= \overrightarrow{BD}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2
\end{aligned}
$$

Rappel

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

2 a) On a

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$$
$$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

Rappel

Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

2 a) On a

$$\begin{aligned} BD^2 &= \overrightarrow{BD}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \end{aligned}$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

Rappel

Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2$$

2 a) On a

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$$
$$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

Rappel

Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2$$
$$= AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2$$

2 a) On a

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}^2$$
$$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

Rappel

Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2$$
$$= AD^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + AB^2$$
$$= 2^2 - 2\times\frac{5}{2} + 4^2$$

2 a) On a

$$\begin{aligned} BD^2 &= \overrightarrow{BD}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \end{aligned}$$

Rappel

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$BD^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

Rappel

Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$$\begin{aligned} BD^2 &= \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 \\ &= AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 \\ &= 2^2 - 2 \times \frac{5}{2} + 4^2 \\ &= 15 \end{aligned}$$