Auto-évaluation ex 1 page 299

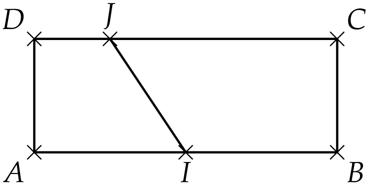
Sésamath

Maths TS obligatoire

CC BY-SA

énoncé

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

BY-SA

1

Rappel

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

cc BY-SA

1

Rappel

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

CC BY-SA

1

Rappel

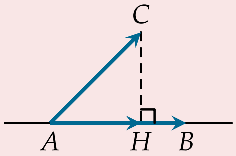
Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

BY-SA

1

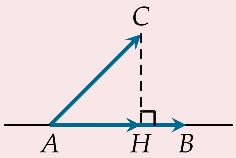
Rappel

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

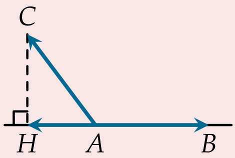
Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

CC BY-SA

correction

1. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B alors :

CC BY-SA

1. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

CC BY-SA

1 Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont évidemment le même sens donc :

BY-SA

1. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont évidemment le même sens donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB$$

cc BY-SA

correction

1. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont évidemment le même sens donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB$$

soit

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$$

cc BY-SA

2

Rappel

- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

CC BY-SA

2 On va utiliser la relation de Chasles :

CC BY-SA

correction

2 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right)$$

BY-SA

correction

2. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

CC BY-SA

correction

2. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Rappel

- On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce que l'on note $\vec{u}\perp\vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

  Concrètement, cela veut dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux quand ils « forment un angle droit ».

CC BY-SA

2. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Rappel

- On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce que l'on note $\vec{u}\perp\vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si, et seulement si, } (\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}\ (2\pi).$$

Concrètement, cela veut dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux quand ils « forment un angle droit ».

On a donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=0$$

CC BY-SA

correction

2. On a :

CC BY-SA

correction

2 On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \right)$$

CC BY-SA

2. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

CC BY-SA

2 On a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u})\cdot(k'\vec{v})=(k\times k')\vec{u}\cdot\vec{v}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

CC BY-SA

2 On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4}AB \times AB\end{aligned}$$

CC BY-SA

correction

2. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

Rappel

Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4}AB \times AB \\ &= -4\end{aligned}$$

cc BY-SA

correction

2. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

CC BY-SA

correction

2. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

cc BY-SA

2 On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}AB\times AB\end{aligned}$$

BY-SA

2. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}AB\times AB\\ &= 8\end{aligned}$$

CC BY-SA

2 On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{1}{2}AB \times AB$$
$$= 8$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

CC BY-SA

2. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{1}{2}AB \times AB$$
$$= 8$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$
$$= -4 + 0 + 8$$

cc BY-SA

2 On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{2}AB\times AB\\ &= 8\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}\\ &= -4+0+8\\ &= 4\end{aligned}$$

CC BY-SA

correction

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JI}$$

CC BY-SA

3. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JI} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} \right)\end{aligned}$$

(cc) BY-SA

correction

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JI} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} \right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

CC BY-SA

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ donc

CC BY-SA

3. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JI} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ donc

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JD} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

CC BY-SA

correction

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ donc

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

De plus, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont de sens opposés donc

CC BY-SA

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ donc

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

De plus, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont de sens opposés donc

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}=-AD\times AD=-2,25$$

BY-SA

correction

3 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ donc

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}=0$$

De plus, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont de sens opposés donc

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}=-AD\times AD=-2,25$$

Alors,

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI}=-2,25$$

CC BY-SA

4. On va utiliser la relation de Chasles :

CC BY-SA

4 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{JI}$$

CC BY-SA

4. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI}\end{aligned}$$

CC BY-SA

correction

4. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= 4+(-2,25)\end{aligned}$$

CC BY-SA

4. On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= 4+(-2,25)\\ &= 1,75\end{aligned}$$

CC BY-SA

4 On va utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{JI} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JI}\\ &= 4+(-2,25)\\ &= 1,75\end{aligned}$$

Remarque :

Dans tout l'exercice, on aurait aussi pu définir le repère $\left(A\ ;\ \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\ ,\ \dfrac{1}{1,5}\overrightarrow{AD}\right)$ qui est bien orthonormé et travailler avec les coordonnées mais c'est moins élégant !

BY-SA