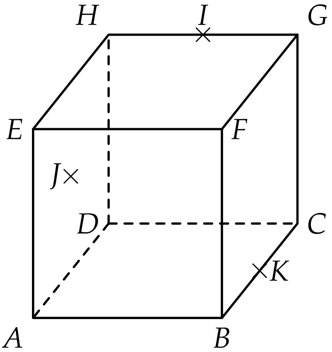
QCM d'autoévaluation, exercice 94 page 326

Sésamath

Maths TS obligatoire

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 ci-contre.
On note I le milieu de $[HG]$, K celui de $[BC]$ et J le centre de la face $ADHE$.
Lorsque cela sera nécessaire, on se placera dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG} =$

a) 2

b) 4

c) 8

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

correction

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Rappel

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.
La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où $\vec{v}_1$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur une droite dirigée par $\vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

En utilisant une **projection** :
La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

$$\text{le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (FG) \text{ est } F.$$

correction

En utilisant une **projection** :

La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

$$\text{le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (FG) \text{ est } F.$$

La droite (IG) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

$$\text{le projeté orthogonal de } I \text{ sur } (FG) \text{ est } G.$$

correction

En utilisant une **projection** :

La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de B sur (FG) est F.

La droite (IG) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de I sur (FG) est G.

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG}$$

correction

En utilisant une **projection** :

La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de B sur (FG) est F.

La droite (IG) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de I sur (FG) est G.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= FG^2\end{aligned}$$

En utilisant une **projection** :
La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de B sur (FG) est F.

La droite (IG) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de I sur (FG) est G.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= FG^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

correction

En utilisant une **projection** :

La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de B sur (FG) est F.

La droite (IG) est perpendiculaire à la droite (FG) donc

le projeté orthogonal de I sur (FG) est G.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= FG^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

réponse **b)**

correction

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

correction

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI}$$

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

correction

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI}\\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} = \left(-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{DA}\right)$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{DA}\right) \\ &= \overrightarrow{DA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{DA}\right) \\ &= \overrightarrow{DA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= 2^2 + \frac{1}{2} \times 0 - 0\end{aligned}$$

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{DA}\right) \\ &= \overrightarrow{DA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= 2^2 + \frac{1}{2} \times 0 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

correction

En utilisant des **décompositions** :
on va décomposer en utilisant, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ qui forment une base de l'espace et sont orthogonaux 2 à 2.

$$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} \\ &= \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{FG} &= \left(-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{DA}\right) \\ &= \overrightarrow{DA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= 2^2 + \frac{1}{2} \times 0 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

réponse **b)**

En utilisant les **coordonnées** :

dans le repère orthonormé $\left(A\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD},\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

correction

En utilisant les **coordonnées** :

dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

En utilisant les **coordonnées** :

dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG} = -1\times 0 + 2\times 2 + 2\times 0$$

En utilisant les **coordonnées** :

dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG} &= -1\times 0+2\times 2+2\times 0\\ &= 4\end{aligned}$$

En utilisant les **coordonnées** :

dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

Ainsi,

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{FG} &= -1\times 0+2\times 2+2\times 0\\ &= 4\end{aligned}$$

réponse **b)**